Blatt 5 Musterlösungen

-1-

(1) $H_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $\Omega := \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : \|u\| < 1\}$

- Transf.: $x_i = \phi_i(r,u) = r u_i$, $i = 1, \dots, n-1$
  $x_n = \phi_n(r,u) = r\sqrt{1-\|u\|^2}$

- $\Rightarrow \|x\|^2_{\mathbb{R}^n} = r^2\left(\|u\|^2 + (1-\|u\|^2)\right) = r^2$

also $r = \|x\|_{\mathbb{R}^n}$, $\Rightarrow u = \frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}(x_1, \dots, x_{n-1})$

- d.h. für $x \in H_+$ gilt $r > 0$ und $\|u\| < 1$

$\Rightarrow H_+ = \phi(M)$ mit $M = \{(r,u) \in \mathbb{R}^n : r \in (0,\infty), u \in \Omega\}$

- nach Transf. formel gilt also

$$I = \int_{H_+} f(x)\,dx = \int_M f \circ \phi(r,u)\,|\det(D\phi)|\,d(r,u)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \left(\int_\Omega f\left(ru, r\sqrt{1-\|u\|^2}\right) |\det(D\phi)|\,du \right) dr$$

- $$\det(D\phi) = \begin{vmatrix} u_i & r I_{n-1} \\ \sqrt{1-\|u\|^2} & \frac{-r u_j}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \end{vmatrix}$$ Entwicklung nach Spalte 1; I_k = k-te Einheitsmatrix

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{1+i} u_i \begin{vmatrix} r I_{i-1} & \\ & r I_{rest} \\ \dots \frac{-r u_j}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \dots & \end{vmatrix}$$ ← Beginn mit Zeile $i+1$ von $r I_{n-1}$

$$+ \sqrt{1-\|u\|^2} \cdot (-1)^{n+1} \det(r I_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} u_i r^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & r & & \\ 0 & & & \ddots & r \\ \frac{-r u_i}{\sqrt{\dots}} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} r^{n-1} \sqrt{1-\|u\|^2}$$ ← Entw. nach Sp. 1

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} u_i r^{i-1} \frac{-r u_i}{\sqrt{1-\|u\|^2}} (-1)^{n-i+1} r^{n-i-1} + (-1)^{n+1} r^{n-1} \cdot \sqrt{1-\|u\|^2}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 + (1-\|u\|^2)}_{=1} \Big\}$$

$$\Rightarrow \quad |\det(D\phi)| = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}$$

damit ergibt sich die Behauptung $\square$

② $a \in \mathbb{R}$, $g(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1 - a^4$

$M_a := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$

a) zu prüfen ist: $\boxed{\operatorname{rang}(Dg) = 1 \quad \forall (x,y) \in M_a}$ (1)

- $Dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$; $\operatorname{rang}(Dg) = 1$ g.d.w. $\|\nabla g\| \neq 0$
- $\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x^2+y^2) \cdot 2x - 4x = 4x(x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(x^2+y^2) \cdot 2y + 4y = 4y \underbrace{(x^2+y^2+1)}_{\neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

$\Rightarrow \|\nabla g\| = 0$ g.d.w. $y = 0$ und $\{ x = 0$ oder $x^2 = 1 \}$ (2)

- aus $\|\nabla g\| = 0$ und $(x,y) \in M_a$ folgt:

$$g(x,y) = g(x,0) = x^4 - 2x^2 + 1 - a^4 = 0$$

falls $x = 0$, so $a^4 = 1$, d.h. $\boxed{a = \pm 1}$

falls $x^2 = 1$, so $\boxed{a = 0}$

$\Rightarrow M_a$ ist 1-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$

für alle $\underline{\underline{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}}}$

b) Fall $|a| > 1$:

- Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$
- $\Rightarrow x^2+y^2 = r^2$

$$g(x,y) = r^4 - 2r^2(\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=\cos(2\varphi)}) + 1 - a^4 = 0$$

$$\Rightarrow (r^2)_{1|2} = \cos(2\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(2\varphi) + \underbrace{a^4-1}_{>0}}$$

„−" Lösung scheidet aus, da <0

$$\overset{r>0}{\Rightarrow} \quad r = \sqrt{\cos(2\varphi) + \sqrt{\cos^2(2\varphi) + a^4 - 1}}$$

$$=: r(\varphi)$$

- damit ist die Parametrisierung von M_a:

$$M_a := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in (0,2\pi), r = r(\varphi)\}$$

3a) ges: T_pM zu $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\}$
$p = (x,y,0) \in M$, d.h. $x^2+y^2 = 1$

- M ist Niveaumenge zu

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1 = 0$$

$$\text{grad} f = (2x, 2y, -2z)^T$$

$$\Rightarrow \text{grad} f(p) = (2x, 2y, 0)^T, \quad \text{wobei } x^2+y^2 = 1$$

- es gilt : $T_pM = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = 0\}$

d.h. für $v \in T_pM$ mit $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor an der Ebene } T_pM \text{ durch } \theta} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow T_pM = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3b) $M :=$ Graph von $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + \cos(\pi(x-y))$

$p := (1, 2, f(1,2))$

- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3x^2 - 2y^2 + \cos(\pi(x-y))\}$

$\Rightarrow M$ ist Niveaumenge zu

$$g(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2 + \cos(\pi(x-y)) - z = 0$$

- $\operatorname{grad} g = \left(6x - \pi \cdot \sin(\pi(x-y)), -4y + \pi \sin(\pi(x-y)), -1\right)$

$$f(1,2) = 3 - 8 + \cos(-\pi) = \underline{\underline{-6}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} g(p) = (6 - \pi \cdot 0, -8 + \pi \cdot 0, -1)^T = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- also : $T_pM = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$=$ Ebene durch θ mit Normalenvektor $(6, -8, -1)^T$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$