Musterlösungen Blatt 4

(1.) <u>geg</u>: $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(t):=\int_0^\infty \exp(-x^2-\frac{t^2}{x^2})\,dx$

<u>a)</u> <u>z.z.: F ist stetig auf $D=[0,\infty)$</u>

- die Funktion $t\mapsto f(x,t)=\exp(-x^2-\frac{t^2}{x^2})$ ist stetig auf D für alle $x\in M:=(0,\infty)$
- Majorante $\phi(x)$:

$$|f(x,t)|=e^{-x^2}\cdot\underbrace{e^{-t^2/x^2}}_{\leq 1}\leq e^{-x^2}=:\phi(x)\qquad \forall t\in D\ \forall x\in M$$

- nach Blatt 3 ist $\phi\in L(M)$

$\overset{\text{Satz 2.7}}{\Longrightarrow}$ F ist stetig auf D $\square$

<u>z.z.: F ist diff'bar auf $D_0=(t_0,t_0+1)$ $\forall t_0>0$</u>

- $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\frac{2t}{x^2}\exp(-x^2-\frac{t^2}{x^2})\qquad \forall t\in D_0\ \forall x\in M=(0,\infty)$

d.h. $t\mapsto f(x,t)$ ist (partiell) diff'bar nach t $\forall t\in D_0$ $\forall x\in M$

- Majorante $\phi(x)$: $\forall t\in D_0,\ x\in M$ gilt:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|=\frac{2t}{x^2}\exp(-x^2-\frac{t^2}{x^2})$$
$$\leq e^{-x^2}\,\frac{2(t_0+1)}{x^2}\exp(-\frac{t_0^2}{x^2})$$

- da $t_0>0$ und $\lim_{z\to\infty} z\cdot e^{-\frac{t_0^2}{2}\cdot z}=0$, $\exists z_0>0$ mit

$$z\leq e^{\frac{t_0^2}{2}z}\quad\forall z>z_0\qquad (1)$$

$g(z)=z\,e^{-\frac{t_0^2}{2}z}$ ist stetig auf $[0,z_0]$

$\Rightarrow \exists C_0<\infty$: $g(z)\leq C_0\quad\forall z\in[0,z_0]\qquad (2)$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad z \le \underbrace{\max\{1, C_0\}}_{=:\, C_1} e^{\frac{t_0^2}{2}\cdot z} \qquad \forall\, z \in [0,\infty)$$

- für $z = \frac{1}{x^2}$ folgt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le 2(t_0+1)\cdot C_1 \underbrace{e^{-\frac{t_0^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}}_{\le 1} \cdot e^{-x^2} \qquad \forall\, t \in D_0 \;\; \forall\, x \in M$$

$$\le 2C_1(t_0+1)\cdot e^{-x^2} =: \phi(x)$$

ϕ ist bekanntlich L-int'bar über M

$\overset{\text{Satz 2.7}}{\Longrightarrow}$ F ist diff'bar in $D_0 = (t_0, t_0+1)$ $\forall\, t_0 > 0$

$\Longrightarrow$ F ist diff'bar auf $(0,\infty)$ $\blacksquare$

b) z.z.: $F'(t) = -2F(t) \quad \forall\, t > 0$ (3)

- nach Satz 2.7 gilt:

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx = \int_0^\infty -\frac{2t}{x^2}\exp\left(-x^2 - \frac{t^2}{x^2}\right) dx$$

Subst.: $z = \frac{t}{x}$ (t fest), $\Rightarrow dz = -\frac{t}{x^2}dx$

$$\Rightarrow F'(t) = 2\int_{z=\infty}^{0} \exp\left(-\frac{t^2}{z^2} - z^2\right) dz \quad , \quad \text{Umbezeichnung } z \mapsto x$$

$$= -2\int_{x=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{x^2} - x^2\right) dx = -2F(t) \quad \blacksquare$$

Herleitung von $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2t}$

- $$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\cdot F(t)\right) = 2e^{2t}F(t) + e^{2t}F'(t)$$

$$= e^{2t}\{\underbrace{2F(t) + F'(t)}_{(3)}\} = 0$$

$$\Rightarrow e^{2t}F(t) = C_0 = \text{const.} \;\; \forall\, t > 0 \quad \xrightarrow{F \text{ stetig}} \quad C_0 = e^0\cdot F(0)$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = c_0 \, e^{-2t}$$

wobei $\quad c_0 = F(0) = \int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ∎

(2.) $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$

$M := \{ x \in \mathbb{R}^3 : 0 < \|x\|^2 \leq 1 \}$

- Kugelkoordinaten: $x = \phi(r, \varphi, \theta)$, wobei

  $(r, \varphi, \theta) \in U = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

- es gilt: $M \cap \phi(U) = \phi(\hat{M})$ mit

  $\hat{M} = (0,1] \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ und $\mu(M \setminus \phi(\hat{M})) = 0$

- nach Transformationsformel gilt

$$\int_M \|x\|^{-\alpha}\, dx = \int_{\hat{M}} r^{-\alpha} \cdot r^2 \sin\theta \; d(r,\varphi,\theta)$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^{2-\alpha} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 r^{2-\alpha}\, dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi}_{2\pi} \; \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{-\cos\theta \,\big|_{\theta=0}^{\pi}}$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^1 r^{2-\alpha}\, dr$$

- das L-Integral ~~ex~~ $\int_0^1 r^{2-\alpha}\, dr$ existiert bekanntlich nur für $2-\alpha > -1$, d.h. für $\boxed{\alpha < 3}$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ ist genau für } \alpha < 3 \text{ in } L(M)}$

③ $(x,y,z) = \phi(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$

$(r,\varphi,z) \in U := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (-\infty,\infty)$

a) **ermittle $\mathbb{R}^3 \setminus V$, $V = \phi(U)$**

- sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dann folgt

$(x,y,z) = \phi(r,\varphi,z)$ mit

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi \overset{(r>0)}{=} \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \in [0,\pi] & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \in (\pi,2\pi) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

und $\varphi = 0$ für $r = 0$

- also gilt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus V$, wenn für die zugehörigen r,φ gilt: $r = 0$ <u>oder</u> $\varphi = 0$

d.h. "$x^2+y^2 = 0$" oder "$y = 0, x > 0$"

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\mathbb{R}^3 \setminus V = [0,\infty) \times \{0\} \times (-\infty,\infty)}}$ ist Teil der Ebene $y = 0$

$\Rightarrow$ für das $\mathbb{R}^3$-Maß: $\boxed{\mu_3(\mathbb{R}^3 \setminus V) = 0}$

(denn das innere Maß ist stets Null)

z.z.: $\left.\begin{array}{l} \mu(M) = \int_{\hat{M}} r \, d(r,\varphi,z) \\ \hat{M} = \phi^{-1}(M \cap V) \end{array}\right\}$ (1)

Bew.: nach Transf'formel gilt

$$\mu(M \cap V) = \int_{M \cap V} 1 \cdot dx = \int_{\phi(\hat{M})} 1 \, dx = \int_{\hat{M}} 1 \cdot |\det(D\phi)| \, d(r,\varphi,z)$$

- aus $M = (M \cap V) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus V)$ folgt

$$\mu(M) \leq \mu(M \cap V) + \underbrace{\mu(\mathbb{R}^3 \setminus V)}_{=0} = \mu(M \cap V)$$

wegen $M \cap V \subset M$ ist $\mu(M \cap V) \leq \mu(M)$

$$\Rightarrow \underline{\mu(M) = \mu(M \cap V)}$$

- $$D\phi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(D\phi) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \quad \mu(M) = \mu(M \cap V) = \int_{\hat{M}} r \, d(r, \varphi, z)$$

$\blacksquare$

b) $M \subset \mathbb{R}^3$ begrenzt von oben durch

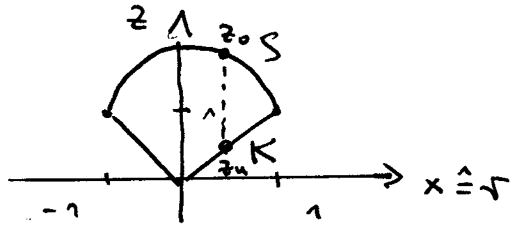
Sphäre $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$

= Rand der Kugel um $(0,0,1)$ mit Radius 1

von unten durch Kegelmantel

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2\}$

- Skizze in Schnittebene $y = 0$:



- obere Begrenzung:

$$r^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow z_o = 1 + \sqrt{1 - r^2}$$

- untere Begrenzung $z^2 = r^2 \Rightarrow z_u = r$

$$\Rightarrow \hat{M} = \phi^{-1}(M \cap V) = \{(r, \varphi, z) \in U : r \in [0,1], \ r \leq z \leq 1 + \sqrt{1-r^2}, \ \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

Blatt 4

$$\mu(M) = \int_{\hat{M}} r \, d(r,\varphi,z) = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=r}^{1+\sqrt{1-r^2}} r \, dz \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left(1 + \sqrt{1-r^2} - r\right) d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(r - r^2 + r\sqrt{1-r^2}\right) dr$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-r^2\right)^{3/2} \right\} \Big|_{r=0}^{1}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(0-1) \right\} = \underline{\underline{\pi}}$$