Blatt 3

-1-

Musterlösungen Blatt 3

(1) • da $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, gilt

$$\frac{1}{2k+1} c_1 < \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{1}{x}\sin(x)\,dx < \frac{1}{2k\pi} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\,dx = \frac{1}{2k} c_1$$

wobei $c_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\,dx$

• da $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, gilt

$$\frac{1}{2k+1}(-c_1) < \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{1}{x}\sin(x)\,dx < +\frac{1}{2k+2}(-c_1)$$

• daraus folgt

$$0 < \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{1}{x}\sin(x)\,dx < \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) c_1$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

• demzufolge ist die Folge

$$I_n := \int_1^{2\pi n} \underbrace{\frac{1}{x}\sin(x)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\int_1^{2\pi} f(x)\,dx}_{=:c_0} + \int_{2\pi}^{2\pi n} f(x)\,dx$$

monoton wachsend u. es gilt

$$I_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} f(x)\,dx < c_0 + \frac{c_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= c_0 + \frac{c_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < c_0 + \frac{c_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, ist die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt u. somit konvergent (da mon. wachsend) damit existiert $\lim_{n\to\infty} \int_1^{2\pi n} f(x)\,dx$ ∎

- es gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx > \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)} |\sin(x)|\,dx = \frac{1}{(k+1)} \cdot c_1$$

$$\Rightarrow \int_1^{\pi n} |f(x)|\,dx = \underbrace{\int_1^{\pi} |f(x)|\,dx}_{=:c_2} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx$$

$$> c_2 + c_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

- da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergiert, folgt dass

$$\int_1^{\pi n} |f(x)|\,dx \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

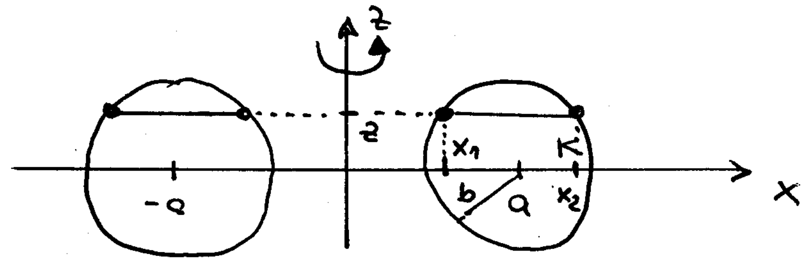
- somit kann $\int_1^{\infty} |f(x)|\,dx$ nicht beschränkt sein

u. $f \notin L([1,\infty))$ ∎

② • sei M der Torus aus Rotation von

$$K = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + z^2 \leq b^2\}, \quad a > b > 0$$

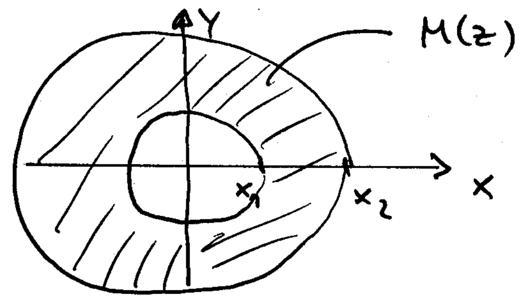
um die z-Achse



• sei $M(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in M\}$

• offenbar ist $M(z) = \emptyset \quad \forall\, z \in \mathbb{R} \setminus [-b,b]$

• für $z \in [-b,b]$ ist $M(z)$ ein Kreisring mit



Innenradius x_1
Außenradius x_2

wobei $$(x_{1,2} - a)^2 + z^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = a \mp \sqrt{b^2 - z^2}$$

• für das $\mathbb{R}^2$-Maß von $M(z)$ gilt

$$\mu_2(M(z)) = \pi\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$
$$\underline{\underline{= 4\pi a \sqrt{b^2 - z^2}}}$$

• nach dem Cavalieri'schen Prinzip folgt

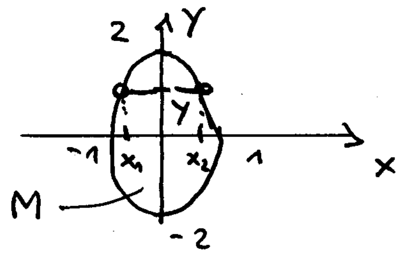
$$\mu(M) = \int_{[-b,b]} 4\pi a \sqrt{b^2 - z^2}\, dz = 4\pi a b \int_{-b}^{b} \sqrt{1 - \left(\tfrac{z}{b}\right)^2}\, dz$$

<u>Subst:</u> $\frac{z}{b} = \cos t$, $dz = -b\sin(t)\, dt$, $t \in [-\pi, 0]$

$$\Rightarrow \mu(M) = 4\pi ab \int_{-\pi}^{0} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{-\sin(t)} \cdot (-b)\sin(t)\,dt$$

$$= 4\pi ab^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{0} \sin^2 t \,dt}_{=\pi/2} = \underline{\underline{2\pi^2 ab^2}}$$

(3) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\} \mathrel{\hat{=}}$ Ellipse $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1$



- Sei $M(y) := \{x \in \mathbb{R}^1 : (x,y) \in M\}$
- offenbar ist $M(y) = \emptyset \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$
- für $y \in [-2,2]$ ist

$$M(y) = [x_1, x_2] \quad \text{mit} \quad x_{1/2}^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

d.h. $\quad x_{1/2} = \mp\sqrt{1-(y/2)^2}$

- nach dem Satz von Fubini gilt damit:

$$I = \int_M y^2 \,d(x,y) = \int_{[-2,2]} \left(\int_{[x_1(y),\, x_2(y)]} y^2 \,dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1-(y/2)^2}}^{\sqrt{1-(y/2)^2}} y^2 \,dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2 \cdot 2\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy \qquad \underline{\text{Subst.}}:\ \frac{y}{2} = \sin(t) \;\Big|\; dy = 2\cos(t)\,dt,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sin^2(t) \cdot 2\cos(t) \cdot 2\cos(t)\,dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\left(2\sin(t)\cos(t)\right)^2}_{=\sin^2(2t)} dt$$

$$= \underline{\underline{2\pi}}.$$