Musterlösungen Blatt 2

① $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, z.z. f ist L-int'bar

Bew.: sei $M_j := \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$, $j \in \mathbb{N}$

- dann gilt: $M := (0,1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, $\mu(M_j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \frac{1}{j(j+1)}$
- $\forall x \in M_j$ gilt $|f(x)| = \frac{1}{x^\alpha} \leq (j+1)^\alpha =: c_j$
- für die einfache Fkt. $g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{M_j}(x)$

gilt damit $\boxed{|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in M}$ (1)

und

$$\int_M g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(j+1)^\alpha}_{c_j} \underbrace{\frac{1}{j(j+1)}}_{\mu(M_j)} = \sum_j \frac{1}{j(j+1)^{1-\alpha}} \leq \sum_j \frac{1}{j^{2-\alpha}}$$

wegen $2-\alpha > 1$ ist $\sum_j \frac{1}{j^{2-\alpha}}$ eine konvergente Majorante zu $\sum_j |c_j| \mu(M_j)$ (beachte $|c_j| = c_j$)

- damit ist g L-int'bar und wegen (1) ist folglich auch f L-int'bar

$\square$

② sei $I(f) := \int_M |f(x)|\,dx \quad \forall f \in L(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar

a) z.z.: $I(f) \geq 0 \quad \forall f \in L(M)$

- sei $g(x) := 0 \quad \forall x \in M$, dann ist offenbar $g \in L(M)$
- nach Definition sind dann $|f|, |g|$ L-int'bar

und es gilt $|g(x)| = 0 \leq |f(x)| \quad \forall x \in M$

- nach Satz 1.13 b der Vorlesung folgt

$$0 = \int_M |g(x)|\,dx \leq \int_M |f(x)|\,dx = I(f) \qquad \blacksquare$$

<u>z.z.: $I(\lambda f) = |\lambda|\, I(f) \quad \forall f \in L(M),\ \lambda \in \mathbb{R}$</u>

- nach Satz 1.13 a ist $|f| \in L(M)$ u. es gilt

$$I(\lambda f) := \int_M |\lambda f(x)|\,dx = \int_M \underbrace{|\lambda|}_{c} \cdot |f(x)|\,dx = |\lambda| \int_M |f(x)|\,dx$$

$$= |\lambda| \cdot I(f)$$

<u>z.z.: $I(f+g) \leq I(f) + I(g) \quad \forall f,g \in L(M)$</u>

- $\forall x \in M$ gilt: $\underbrace{|f(x) + g(x)|}_{=: f_1(x)} \leq \underbrace{|f(x)| + |g(x)|}_{=: f_2(x)}$

- nach Satz 1.13 folgt

$$I(f+g) = \int_M f_1(x)\,dx \leq \int_M f_2(x)\,dx \overset{1.13a}{=} \int_M |f(x)|\,dx + \int_M |g(x)|\,dx$$

$$= I(f) + I(g) \qquad \blacksquare$$

<u>2b)</u> $\boxed{\text{z.z.: } \mu(\{x \in M : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}) \leq n \int_M |f(x)|\,dx} \qquad (1)$

- sei $M_n := \{x \in M : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\} = |f|^{-1}([\tfrac{1}{n}, \infty))$

- da mit f auch $|f|$ meßbar ist, ist M_n meßbar

$$\Rightarrow \int_M |f(x)|\,dx = \int_{M_n} \underbrace{|f(x)|}_{\geq \frac{1}{n}}\,dx + \int_{M \setminus M_n} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0}\,dx$$

$$\geq \int_{M_n} \frac{1}{n}\,dx + \int_{M \setminus M_n} 0\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\mu(M_n) + 0 \qquad \Rightarrow \text{Beh.} \quad \boxed{\text{I}}$$

- sei nun : $I(f) = 0$ und

$$N := \{x \in M : f(x) \neq 0\} = \{x \in M : |f(x)| > 0\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in M : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}}_{= M_n}$$

- aus (1) folgt: $\mu(M_n) \leq n \cdot \int_M |f(x)|\,dx = n \cdot I(f) = 0$

$\Rightarrow \mu(M_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ u. somit

$$\mu(N) \leq \sum_n \mu(M_n) = 0$$

also ist N eine Menge vom Maß Null, d.h.

$f(x) = 0$ f.ü. in M $\boxed{\text{II}}$

③ sei $M = [0,1]$, $p > 0$, $f_k : M \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \dfrac{k^p x}{1 + k^2 x^2}$

a) <u>punktweise Konvergenz von (f_k), $k \to \infty$</u>

- für $x = 0$: $f_k(0) = 0 \Rightarrow \exists\, f(0) := \lim_{k \to \infty} f_k(0) = 0$

- <u>sei $x \neq 0$, $p = 2$:</u> $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} \dfrac{x}{\frac{1}{k^2} + x^2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{x} =: f(x)}}$

sei $x \neq 0$, $p > 2$:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{k^{p-2}\cdot x}^{\to \pm\infty}}{\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\to 0} + x^2} = \pm\infty \quad (+\infty \text{ für } x>0)$$

d.h. für $p > 2$ ist (f_k) nicht punktweise konv.

sei $x \neq 0$, $p \in (0,2)$:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{\underbrace{\frac{1}{k^p}}_{\to 0} + \underbrace{k^{2-p}x^2}_{\to +\infty}} = 0 =: f(x)$$

Zus'fassung: (f_k) ist punktw. konv. für $p \in (0,2]$

die Grenzfunktion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ist

$\boxed{f(x) = 0 \quad \text{für } p \in (0,2)}$ $\quad \boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \ p = 2}$

3b) wann existiert eine int'bare Majorante?

• wir zeigen: $\boxed{k^p x^p \leq 1 + k^2 x^2 \quad \forall\, x \in [0,1],\ p \in (0,2)}$ (1)

1. Fall: $x \leq \frac{1}{k}$: $\Rightarrow kx \leq 1$

$$\overset{p>0}{\Rightarrow} (kx)^p \leq 1 \leq 1 + k^2x^2$$

2. Fall: $x > \frac{1}{k}$: $\Rightarrow xk > 1$

$$\Rightarrow k^2x^2 - k^px^p = \underbrace{(kx)^p}_{>1} \cdot \left(\underbrace{(kx)^{2-p}}_{>1} - 1 \right) > 0$$

$$\Rightarrow k^2x^2 - k^px^p + 1 > 1 > 0 \Rightarrow (1) \quad \blacksquare$$

- $\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \dfrac{k^p x^p}{1+k^2x^2} = f_k(x)\cdot x^{p-1} \leq 1$

$\overset{x\geq 0}{\Longrightarrow} \quad f_k(x) = |f_k(x)| \leq x^{1-p} =: F(x) \quad \forall\, x\in[0,1]$

- $F(x) = x^{1-p}$ ist int'bare Majorante, denn
$$\int_0^1 x^{1-p}\,dx = \frac{1}{2-p}\, x^{2-p}\Big|_0^1 = \frac{1}{2-p}$$

also: $\forall\, p\in(0,2)$ hat (f_k) die int'bare Majorante
$$F(x) = x^{1-p}$$

- Der Fall $p=2$: Annahme: $\exists$ int'bare Majorante F

$$\Rightarrow \int_0^1 |f_k(x)|\,dx \leq \int_0^1 F(x)\,dx = I_F \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$$

- wegen $x\geq 0$ gilt
$$\int_0^1 |f_k(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{k^2x}{1+k^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+k^2x^2)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+k^2)$$

d.h. $\frac{1}{2}\ln(1+k^2) \leq I_F \quad \forall\, k$ Widerspruch

also gibt es keine int'bare Majorante für $p=2$

3c) Vertauschbarkeit von Integration u. Grenzübergang

Fall $p\in(0,2)$: (f_k) ist punktw. konv. gegen $f=0$;
$\exists$ int'bare Majorante F zu (f_k)
$\Rightarrow$ Vertauschbarkeit nach dem Satz von Lebesgue (2.1)

Fall $p=2$: $\displaystyle \lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+k^2) = +\infty = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

- die Grenzfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$ f.ü in $[0,1]$ ist aber nicht L-int'bar, denn sonst wäre

$$\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty$$

- Somit kann man bei $p=2$ nicht von der Vertauschbarkeit zwischen Integration u. Grenzübergang sprechen