Musterlösungen Blatt 1

A1a) Meßbarkeit von $f+g$

- sei $U_c^{f+g} := \{x \in M : f(x) + g(x) < c\}$

  $U_r^f := \{x \in M : f(x) < r\}$, $U_s^g := \{x \in M : g(x) < s\}$

- wir zeigen zunächst: $\boxed{U_c^{f+g} = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s<c}} (U_r^f \cap U_s^g)}$ (1)

Bew: sei $x \in U_c^{f+g}$, dann ist

$$\varepsilon := c - [f(x) + g(x)] > 0$$

- da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existieren $r, s \in \mathbb{Q}$ mit

  $r - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < r$ und $s - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < s$

- hierfür gilt also: $x \in U_r^f$ und $x \in U_s^g$

  sowie $(r+s) - \varepsilon < f(x) + g(x)$

  $\Rightarrow r + s < \varepsilon + [f(x) + g(x)] = c$

  also liegt x in der rechten Menge von (1)

- sei x Element der rechten Menge von (1)

  $\Rightarrow \exists\, r,s \in \mathbb{Q},\ r+s<c :\ \underbrace{f(x) < r \text{ und } g(x) < s}$

  $\Rightarrow f(x) + g(x) < r + s < c$

  also $x \in U_c^{f+g}$ $\blacksquare$

- nach Vor. sind U_r^f und U_s^g meßbar $\forall\, r,s \in \mathbb{Q}$;

  da $\mathcal{M}$ ein Mengenring ist, folgt dass $U_r^f \cap U_s^g$ meßbar

- da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, ist auch

  $\{(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : r+s < c\}$ abzählbar

- da $\mathcal{M}$ σ-Algebra ist, folgt dass

  $$\bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s<c}} (U_r^f \cap U_s^g) \text{ meßbar ist}$$

  also ist nach (1) auch U_c^{f+g} meßbar $\forall c \in \mathbb{R}$ ▯

Meßbarkeit von $f \cdot g$

- mit f, g sind nach obigem Beweis auch meßbar

  $f+g$ u. nach ÜA 4a auch f^2 und g^2 sowie $(f+g)^2$

- demzufolge ist

  $$2(f \cdot g) = (f+g)^2 - f^2 - g^2 \quad \text{meßbar}$$

  d.h. $U_c^{2fg} = \{x \in M : 2f(x)g(x) < c\} \in \mathcal{M} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow \{x \in M : f(x)g(x) < c\} = U_{2c}^{2fg} \in \mathcal{M} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

  also ist $f \cdot g$ meßbar ▯

A1b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend

- zu zeigen: $\boxed{U_c := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}} \in \mathcal{M} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

- da f mon. wachsend ist gilt:

$f(x^-) < c \implies f(x) < c \quad \forall\, x \in (-\infty, x^-]$ (1)

$f(x^+) \geq c \implies f(x) \geq c \quad \forall\, x \in [x^+, \infty)$ (2)

- zu jedem $c \in \mathbb{R}$ gibt es folgende Fälle:

1.Fall: $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) < c : \implies U_c = \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

2.Fall: $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq c : \implies U_c = \emptyset \in \mathcal{M}$

3.Fall: $\exists\, x_c^-, x_c^+ \in \mathbb{R} : f(x_c^-) < c$ und $f(x_c^+) \geq c$

- wegen (2) folgt: $U_c \subset \mathbb{R} \setminus [x_c^+, \infty) = (-\infty, x_c^+)$

also ist die Menge $U_c \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt

u. es existiert

$$s_c := \sup_{x \in U_c} x \leq x_c^+$$

- Fall 3a) $f(s_c) < c : \overset{(1)}{\implies} U_c = (-\infty, s_c]$ meßbar

- Fall 3b) $f(s_c) \geq c : \overset{(2)}{\implies} U_c \subset (-\infty, s_c)$

Sei $x_0 \in (-\infty, s_c)$; angenommen $f(x_0) \geq c$,

dann wäre nach (2): $U_c \subset (-\infty, x_0)$ mit $x_0 < s_c$

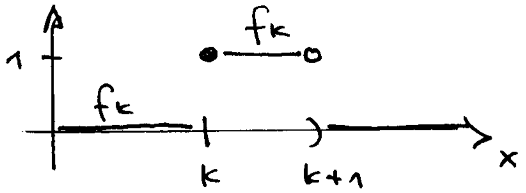
u. s_c wäre nicht das Supremum;

$\implies f(x_0) < c \implies x_0 \in U_c$

also gilt: $(-\infty, s_c) \subset U_c \implies U_c = (-\infty, s_c)$ meßbar ▯

A2) wir betrachten die Folge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit $f_k(x) := \chi_{[k,k+1)}(x)$, bei der $\mu(M) = \mu(\mathbb{R}) = \infty$



- es gilt: $f_k(x) = 0 \quad \forall\ k > x$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f_k(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

d.h. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist <u>punktweise konvergent</u> gegen $f(x) = 0$

- <u>aber</u>: (f_k) ~~konvergiert~~ erfüllt nicht ~~dem~~ die Eigenschaft:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \exists\ E \in \mathcal{M},\ \mu(E) < \varepsilon : f_k \xrightarrow{\text{glm.}} f \text{ auf } \mathbb{R} \setminus E$$

<u>denn</u>: • für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ • kann die Menge E mit $\mu(E) < \frac{1}{2}$ niemals ein Intervall $[k, k+1)$ enthalten

- $\Rightarrow \forall\ k \in \mathbb{N} \ \exists\ x \in [k, k+1) \setminus E$ mit

$$|f_k(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1$$

- demzufolge kann nicht gelten:

$$\forall\ \delta > 0 \ \exists\ k_0(\delta) : |f_k(x) - f(x)| < \delta \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus E$$

d.h. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kann nicht glm. auf $\mathbb{R} \setminus E$ konvergieren

- also ist die Behauptung des Satzes von Egoroff nicht erfüllt ▯

A3) <u>Der Fall: $f: M \to \mathbb{R}$ ist einfach u. int'bar</u>

- es gilt dann: $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \chi_{M_j}(x)$, $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$,

wobei die $M_j \subset M$ disjunkt <u>und</u> $\sum_j |c_j| \mu(M_j)$ konvergent

- sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j > n_0} |c_j| \mu(M_j) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

- sei $c_{max} := \max_{j=1,\dots,n_0} |c_j|$

- für jedes $E \subset M$, $E \in \mathcal{M}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n_0} |c_j| \underbrace{\mu(M_j \cap E)}_{\leq \mu(E)} \leq n_0 \cdot c_{max}\, \mu(E) < n_0 \cdot c_{max}\, \delta \qquad (2)$$

- wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{2 \cdot n_0 c_{max}}$ u. nutzen $E = \bigcup_j (E \cap M_j)$

$$\Rightarrow \int_E |f(x)|\, dx := \sum_j |c_j| \mu(E \cap M_j)$$

$$\overset{(2)}{\leq} \underbrace{n_0 c_{max} \delta} + \underbrace{\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |c_j| \underbrace{\mu(E \cap M_j)}_{\leq \mu(M_j)}}_{(1)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \int_E |f(x)|\, dx < \varepsilon \quad \forall E \subset M, E \in \mathcal{M} \text{ mit } \mu(E) < \delta$$

$\blacksquare$

zu A3) <u>Der allgemeine Fall: $f: M \to \mathbb{R}$ ist int'bar</u>

- nach Def. 1.11 $\exists$ einfache, int'bare Fkt. $g: M \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{f.ü. in } M \qquad (3)$$

- für g wurde bereits bewiesen, dass

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \int_E |g(x)| \, dx < \varepsilon \quad \forall E \subset M, E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \delta} \qquad (4)$$

- da f u. g int'bar sind, sind auch $|f|, |g|$ int'bar

- $\overset{(3)}{\Longrightarrow} \ |f(x)| \leq |g(x)|$ f.ü. in E

$$\overset{\text{Satz 1.13 b)}}{\Longrightarrow} \int_E |f(x)| \, dx \leq \int_E |g(x)| \, dx \overset{(4)}{<} \varepsilon$$

$$\forall E \subset M, E \in \mathcal{M}, \mu(E) < \delta$$

$\blacksquare$