Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 12.06.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II für Physiker und Lehramt
Sommersemester 2012 - Blatt 9

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 20.06.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) := y^{xz}$$

im Punkt $(1,1,1)$ in Richtung desjenigen Einheitsvektors, der in Richtung des Vektors $h = (-1,1,-1)$ zeigt. Welche Richtung ist im Punkt $(1,1,1)$ diejenige des steilsten Anstieges der Funktion f ?

(**6 Punkte**)

2. Zeigen Sie, dass es keine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben kann mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(e^{-x^3y^4}, e^{-x^4y^3}\right) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tipp: Nehmen Sie die Existenz einer solchen Funktion f an und führen Sie dies zum Widerspruch.

(**4 Punkte**)

3. Ermitteln Sie für folgende Funktion das Taylorpolynom vom Grad 2 zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$f(x,y) := \frac{\cos(y)}{\cos(x)}.$$

(**4 Punkte**)

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := x^2 - xy - 2y^2.$$

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2)$ in Richtung des Einheitsvektors, der mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ bildet.

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   a) Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0) \in V$ gibt derart, dass f die Menge V bijektiv auf $W = f(V)$ abbildet.

   b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

6. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Abbildung

$$f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$$

zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1,1)$.