Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 16.05.2012
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II für Physiker und Lehramt
Sommersemester 2012 - Blatt 6

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 23.05.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Gegeben sei die Funktionenfolge
$$f_n(x) := \frac{x}{1+nx}, \qquad \forall\, x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$
Berechnen Sie $\|f_n\|_\infty$ und zeigen Sie, dass $f_n \to 0$ für $n \to \infty$ in $C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. (**4 Punkte**)

2. Sei $C^0([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |\ f \text{ ist stetig}\}$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$. Zeigen Sie, dass
$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad \forall\, f \in C^0([a,b])$$
eine Norm auf $C^0([a,b])$ ist. (**4 Punkte**)

3. a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $a_n \in \mathbb{R}^2$ mit
$$a_n := \left((\sqrt[n]{n} - 2)^3,\ \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$$
auf Konvergenz.

   b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $a_n \in \mathbb{R}^3$ mit
$$a_n := \left(\frac{1}{n},\ \frac{n^2-2}{4n},\ 2^{-n}\right)$$
(**2+2 Punkte**)
auf Konvergenz.

4. Berechnen Sie $\|f_n\|_\infty$ und $\|f_n\|_1$ für die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:
$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } x \in [0, 1/n] \\ -n^2 x + 2n, & \text{falls } x \in (1/n, 2/n] \\ 0, & \text{falls } x \in (2/n, 1]. \end{cases}$$

5. Untersuchen Sie die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $a_n \in \mathbb{R}^2$ auf Konvergenz:
$$a_n := \left(\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}},\ e^{\frac{1}{n+1}}\right).$$

6. Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0([-1,1])$ durch
$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [-1, -1/n] \\ 1 + nx, & \text{falls } x \in (-1/n, 0] \\ 1, & \text{falls } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f_n und zeigen Sie die Monotonie-Eigenschaft

$$f_m(x) \leq f_n(x) \qquad \forall\, x \in [-1,1],\ m,n \in \mathbb{N},\ m > n.$$

b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^0([-1,1],\ \|\cdot\|_1)$ ist, wobei $\|\cdot\|_1$ die Norm aus Aufgabe 2 bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass es kein Grenzelement $f \in C^0([-1,1]$ geben kann, derart, dass $\|f_n - f\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$, d.h., dass der Raum $C^0([-1,1],\ \|\cdot\|_1)$ **nicht vollständig** ist.