

**Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II für Physiker und Lehramt
Sommersemester 2012 - Blatt 5**

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 16.05.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$a) \int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt \quad b) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad c) \int_0^{\pi/2} \tan(x) dx.$$

(**2+2+2 Punkte**)

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Vergleichskriteriums, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^p}} dx$$

für $p > 3$ konvergiert und für $p \leq 3$ divergiert.

(**4 Punkte**)

3. a) Skizzieren Sie die Kurve mit der Parametrisierung

$$\varphi(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

und berechnen Sie deren Länge.

- b) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion

$$f : [0, \ln(2)] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(t) := 2e^t + \frac{1}{8}e^{-t}.$$

(**2+2 Punkte**)

4. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$a) \int_2^3 \ln(t-2) dt \quad b) \int_0^{\infty} e^{-px} dx \quad (p > 0).$$

5. Untersuchen Sie mit Hilfe des Vergleichskriteriums, für welche $p > 0$ das folgende uneigentliche Integral konvergiert

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(x)}{x^p} dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Formel, dass

$$0 \leq 1 - \cos(x) \leq \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

6. a) Skizzieren Sie die Kurve mit der Parametrisierung

$$\varphi(t) = (t, t \sin(t), t \cos(t)), \quad t \in [0, \pi]$$

und berechnen Sie deren Länge.

- b) Berechnen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f : [0, 7/3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := t\sqrt{t}.$$