Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. K. Deckelnick, Prof. Dr. F. Schieweck 18.04.2012

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II für Physiker und Lehramt
Sommersemester 2012 - Blatt 2

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Mittwoch, 25.04.2012, zu Beginn der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes von l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} x\,\ln(1+\frac{1}{x}).$$

(**2+2 Punkte**)

2. Gegeben sei die Funktion $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

   a) Leiten Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für die allgemeine Ableitung $f^{(k)}(x)$, $k\in\mathbb{N}$ her. (*Hinweis:* Formen Sie, bevor Sie weiter differenzieren, zunächst das Ergebnis von $f'(x)$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in die Summe zweier einfacher Brüche um.)

   b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f mit dem Entwicklungspunkt $a=0$ und geben Sie das Restglied konkret in der Lagrange'schen Form an.

   c) Zeigen Sie für $x=\frac{1}{3}$ die Fehlerabschätzung

$$\left|f(\frac{1}{3})-T_n(\frac{1}{3})\right| \le \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

   d) Bestimmen Sie den minimalen Grad n des Taylor-Polynoms, so dass bei der näherungsweisen Berechnung von $\ln(2)$ mittels $T_n(\frac{1}{3})$ der Fehler höchstens 10^{-2} ist.

(**4+2+2+2 Punkte**)

3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x):=x^6-4x^5+8x^4-12x^3+13x^2-8x-5$$

am Entwicklungspunkt $a=1$ in ein Taylor-Polynom vom Grad 3 und geben Sie das Lagrange'sche Restglied konkret an. Zeigen Sie damit, dass $f(x)$ an der Stelle $x=1$ ein globales Minimum besitzt.

(**3 Punkte**)

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes von l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right), \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}, \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}.$$

5. Approximieren Sie zunächst die Funktion $f(x):=xe^x$ durch ein Taylor-Polynom beliebiger Ordnung n mit dem Entwicklungspunkt $a=\frac{1}{2}$ und geben Sie das Lagrange'sche Restglied an. Bestimmen Sie dann den minimalen Grad n derart, dass der maximale Fehler auf dem Intervall $[\frac{1}{4},1]$ kleiner als 10^{-2} ist.