Musterlösungen Blatt 10

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 - 6x + (3-x)(y^3 - 3y)$

Gesucht: lok. Extrema

Benötige: ∇f, Hess f

- $\partial_x f = 2x - 6 - y^3 + 3y$

  $\partial_y f = (3-x)(3y^2 - 3)$

  $\partial_{xx} f = 2$

  $\partial_{yy} f = (3-x)6y$

  $\partial_{xy} f = -3y^2 + 3 \underset{\substack{\uparrow \\ f \in C^2,\ \text{Satz v. Schwarz}}}{=} \partial_{yx} f$

$\Rightarrow \nabla f = (2x - 6 - y^3 + 3y, (3-x)(3y^2 - 3))$

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 2 & -3y^2+3 \\ -3y^2+3 & 6y(3-x) \end{pmatrix}$$

- notw. Bed. für lok. Extrema: $\nabla f = 0$

$\Leftrightarrow$ I $\quad 2x - 6 - y^3 + 3y = 2(x-3) - y(y^2-3) = 0$

II $\quad (3-x)(3y^2-3) = 0$

sei: $\underline{x = 3}$: II ✓ , I : $-y(y^2-3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $y = \pm\sqrt{3}$

$\underline{x \neq 3}$: II : $\underbrace{(3-x)}_{\neq 0}(3y^2-3) = 0 \Leftrightarrow 3(y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$y = 1$ in I : $2x - 6 - 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$y = -1$ in I : $2x - 6 + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Insgesamt also folgende mögl. Kandidaten für lok. Ext.:

$(3,0)$, $(3, \pm\sqrt{3})$, $(2,1)$, $(4,-1)$

- Hinreichende Bed: Einsetzen in Hess f
  - $\mathrm{Hess}\, f(3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$0 = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 9 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{10}$

D.h. ein EV pos, ein EV neg $\Rightarrow$ Hess $f(3,0)$ indefinit
$\Rightarrow$ Sattelpunkt in $(3,0)$

- $\mathrm{Hess}\, f(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix $\Rightarrow$ EVe auf der Diagonalen, alle positiv
$\Rightarrow$ Hess $f(2,1)$ pos. definit
$\Rightarrow$ lok. Min in $(2,1)$ mit $f(2,1) = -10$

- $\mathrm{Hess}\, f(4,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

analog oben: Hess $f(4,-1)$ pos def.
$\Rightarrow$ lok. Min in $(4,-1)$ mit $f(4,-1) = -10$

- $\mathrm{Hess}\, f(3,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$0 = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 36 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{37}$

$\Rightarrow$ analog s.o.: Hess $f(3,\sqrt{3})$ indef., also Sattelpunkt in $(3,\sqrt{3})$

- $\mathrm{Hess}\, f(3,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ analog: Sattelpkt in $(3,-\sqrt{3})$.

Insgesamt: lok. Minima in $(2,1)$ und $(4,-1)$ mit
$f(2,1) = f(4,-1) = -10$

2) $f: B \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$, $B = [0,2] \times [-1,2]$

Gesucht: glob. Min/Max.

<u>Suche im Inneren von B:</u> Dazu prüfe notw. Krit: $\nabla f = 0$

- $\partial_x f = 3x^2 - 3y$

  $\partial_y f = 3y^2 - 3x$

D.h. $\nabla f = 0 \iff 3(x^2 - y) = 0 \quad \mathrm{I}$

$\qquad\qquad\qquad\quad 3(y^2 - x) = 0 \quad \mathrm{II}$

I liefert: $y = x^2$, in II: $x^4 - x = 0 \iff x(x^3 - 1) = 0$

$\iff x = 0$ oder $\underline{x^3 = 1}$

$\iff x = 1$ oder $\underline{x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

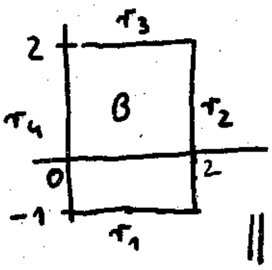
fällt weg, da nicht reell.

$\overset{\text{in } \mathbb{R}}{\iff} x = 0$ oder $x = 1$

Damit folgende Kandidaten, da $y = x^2$: $(0,0)$, $(1,1)$ mit

$\| \; f(0,0) = 0 \quad ; \quad f(1,1) = -1 \; \|$

<u>Untersuchungen auf ∂B</u> (Rand von B)



<u>unten:</u> $\tau_1(x) = f(x,-1) = x^3 + 3x - 1$, $x \in [0,2]$

$\tau_1'(x) = 3x^2 + 3 = 0 \iff x^2 = -1$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \tau_1(x)$ keine lok. Ex. auf $(0,2)$

$\|$ Rand: $\tau_1(0) = -1$, $\tau_1(2) = 13$ $\|$

<u>rechts:</u> $\tau_2(y) = f(2,y) = 8 + y^3 - 6y$, $y \in [-1,2]$

$\tau_2'(y) = 3y^2 - 6 = 0 \iff y = \pm\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \notin (-1,2)$, d.h. nur $\sqrt{2}$ möglich

$| \; \tau_2(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}343$; Rand: $\tau_2(-1) = 13$, $\tau_2(2) = 4 \; \|$

- <u>oben</u>: $r_3(x) = f(x,2) = x^3 + 8 - 6x \;,\; x \in [0,2]$

$r_3'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2} \;,\; -\sqrt{2} \notin (0,2)$, d.h. nur $\sqrt{2}$ möglich

$\| \; r_3(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}343 \;,$ Rand: $r_3(0) = 8 \;,\; r_3(2) = 4 \; \|$

- <u>links</u>: $r_4(y) = f(0,y) = y^3 \;,\; y \in [-1,2]$

$r_4'(y) = 3y^2 = 0 \iff y = 0$

$\| \; r_4(0) = 0 \;,$ Rand: $r_4(-1) = -1 \;,\; r_4(2) = 8 \; \|$

Insgesamt:
- $f(1,1) = -1$
- $f(0,0) = 0$
- $\min\limits_{\partial B} f(x,y) = -1$ in $(0,-1)$
- $\max\limits_{\partial B} f(x,y) = 13$ in $(2,-1)$

$\Rightarrow$ glob. Minima bei $(1,1), (0,-1)$ mit $f = -1$

glob. Maximum bei $(2,-1)$ mit $f = 13$