Musterlösungen Blatt 9

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := y^{xz}$

- $f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xz\ln(y)} \right)$

$$= e^{xz\ln(y)} \cdot z\ln(y)$$

$$f_y(x,y,z) = xz \cdot y^{xz-1}$$

$$f_z(x,y,z) = e^{xz\ln(y)} \cdot x\ln(y)$$

$\overset{\ln(1)=0}{\Rightarrow}$ $\operatorname{grad} f(1,1,1) = [0 \, , \, 1 \, , \, 0]$

- sei v = Einheitsvektor in Richtung von $h = (-1,1,-1)$

$\Rightarrow v = \frac{1}{\|h\|} h = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$

- Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = \operatorname{grad} f(1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

- Richtung w des steilsten Anstieges von f in $(1,1,1)$:

$$w = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(1,1,1)\|} \operatorname{grad} f(1,1,1)^T = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

(2) Bew. (indirekt) :

- Annahme: $\exists\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff'bar mit

$$\text{grad } f(x,y) = (f_x, f_y) = \left(e^{-x^3y^4}, e^{-x^4y^3}\right), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{e^{-x^3y^4}}_{f_x}\Big) = e^{-x^3y^4}(-4x^3y^3)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{e^{-x^4y^3}}_{f_y}\Big) = e^{-x^4y^3}(-4x^3y^3)$$

- nach dem Satz von Schwarz gilt

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow -4x^3y^3 e^{-x^3y^4} = -4x^3y^3 e^{-x^4y^3} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, y \neq 0: \quad e^{-x^3y^4} = e^{-x^4y^3} \quad \Big|\ \ln(\ldots)$$

$$\Rightarrow \quad -x^3y^4 = -x^4y^3$$

$$\Rightarrow -x^3y^3(y-x) = 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y - x = 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$$

Wdspr. ↯

Bl. 9

3) Taylorpolynom 2. Grades zum Entw'punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ zur Funktion

$$f(x,y) = \frac{\cos(y)}{\cos(x)}$$

- Vor $\cos(x) \neq 0$ (damit $f(x,y)$ definiert ist)

$\rightarrow$ ist erfüllt in Umgebung von $(x_0, y_0) = (0,0)$, da $\cos(0) = 1$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ ist im Umgebung von $(0,0)$ beliebig oft stetig partiell diff'bar

- Taylorpolynom 2. Grades

$$T_2(x,y) = f(0,0) + \{f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)\}$$
$$+ \frac{1}{2!}\{f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0)$$
$$+ f_{yy}(0,0)(y-0)^2\}$$

- $f(0,0) = \frac{\cos 0}{\cos 0} = \underline{\underline{1}}$

- $f_x(x,y) = \cos(y) \frac{-1}{\cos(x)^2}(-\sin(x)) \rightarrow f_x(0,0) = \underline{\underline{0}}$

- $f_y(x,y) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(y)) \longrightarrow f_y(0,0) = \underline{\underline{0}}$

- $f_{xx}(x,y) = \cos(y) \frac{\cos(x) \cdot \cos^2(x) - \sin(x) \cdot (2\cos(x) \cdot (-\sin x))}{(\cos(x))^4}$

- $f_{xx}(0,0) = 1 \cdot \frac{1 - 0}{1} = \underline{\underline{1}}$

Bl. 9
-4-

- $f_{xy}(x,y) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}(-\sin(y)) \to f_{xy}(0,0) = 0$

- $f_{yy}(x,y) = \frac{1}{\cos(x)}(-\cos(y)) \to f_{yy}(0,0) = \underline{\underline{-1}}$

- Zus'fassung:

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2!}\left\{1 \cdot x^2 + 2 \cdot 0\,xy + (-1)y^2\right\}$$

$$\underline{\underline{= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}}$$