Musterlösungen Blatt 7

1a) $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}$

- wir zeigen, dass $\mathbb{R}^3 \setminus M$ offen ist:

Bew: • sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus M$

$\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 1 \neq 0 \Rightarrow \delta := |x_0 + y_0 + z_0 - 1| > 0$

• sei $(x,y,z) \in B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$, $\varepsilon > 0$ hinr. klein

$\Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-x_0| < \varepsilon$ und $|y-y_0| < \varepsilon$ und $|z-z_0| < \varepsilon$

• $\Rightarrow |x+y+z-1|$

$= |(x_0+y_0+z_0-1) + (x-x_0) + (y-y_0) + (z-z_0)|$

$\geq \underbrace{|x_0+y_0+z_0-1|}_{=\delta} - \underbrace{|x-x_0|}_{<\varepsilon} - \underbrace{|y-y_0|}_{<\varepsilon} - \underbrace{|z-z_0|}_{<\varepsilon}$

$> \delta - 3\varepsilon$

wir wählen ε so dass $\delta - 3\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{6}$

dann gilt also: $|x+y+z-1| > \frac{\delta}{2} \quad \forall (x,y,z) \in B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \quad \forall (x,y,z) \in B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus M$ ist offen ▥

- da $\mathbb{R}^3 \setminus M$ offen ist, ist M abgeschlossen (nach Def.)

• wir zeigen: in jeder Kugel $B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$ von $(x_0,y_0,z_0) \in M$ gibt es einen Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M$

Bew: • aus $(x_0,y_0,z_0) \in M$ folgt $x_0+y_0+z_0 = 1$

• der Punkt $(x,y,z) = (x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, y_0, z_0)$ liegt in $B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$ u. es gilt

$$x+y+z = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \neq 1 \implies (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \quad \square$$

• aus obiger Behauptung folgt: M ist nicht offen

• weiterhin gilt:
in jeder Kugel $B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0))$ eines beliebigen Punktes $(x_0,y_0,z_0) \in M$ liegt sowohl ein Punkt in $\mathbb{R}^3 \setminus M$ als auch ein Punkt in M (nämlich $(x_0,y_0,z_0) \in B_\varepsilon(..)$)

$\implies$ jeder Punkt $(x_0,y_0,z_0) \in M$ ist Randpunkt von M

• sei $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus M$; da $\mathbb{R}^3 \setminus M$ offen ist, existiert eine Kugel $B_\varepsilon((x_0,y_0,z_0)) =: K_\varepsilon$ mit $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3 \setminus M$

$\implies$ in K_ε liegt kein Punkt von M

$\implies$ (x_0,y_0,z_0) ist kein Randpunkt von M

$\implies \partial M \subset M$

• wegen $(x_0,y_0,z_0) \in \partial M \;\; \forall (x_0,y_0,z_0) \in M$, folgt $\boxed{\partial M = M}$

Bl. 7

-3-

$$\Rightarrow \quad \overline{M} := M \cup \partial M = M \cup M = \underline{\underline{M}}$$

$$\mathring{M} := M \setminus \partial M = M \setminus M = \underline{\underline{\emptyset}}$$

- wir zeigen: <u>M ist nicht kompakt</u>

<u>Bew</u> (indirekt) • Annahme M wäre kompakt

nach Bem. 2 nach Satz 2.8 der Vorlesung folgt dann: M ist abgeschlossen u. <u>beschränkt</u>

- da $(x, y, z) = (n, n, 1-2n) \in M \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

folgt dass M unbeschränkt ist

<u>Wdspr.</u> ↯

1b) $\underline{M = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \leq 1\}}$

- $0 < x^2 \iff x \neq 0$
- $x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow M = [-1, 0) \cup (0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus M = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$

- wir zeigen: <u>M ist nicht offen</u>

<u>Bew</u>: zu $x_0 = 1 \in M$ und beliebigem $\varepsilon > 0$

gilt $B_\varepsilon(x_0) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset M$

da z.B. $x = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin M$ ▯

- wir zeigen: <u>$\mathbb{R} \setminus M$ ist nicht offen</u>

<u>Bew</u>: zu $x_0 = 0 \in \mathbb{R} \setminus M$ u. beliebigem $\varepsilon > 0$

gilt $B_\varepsilon(x_0) = (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset \mathbb{R} \setminus M$

da z.B. $x = \frac{\varepsilon}{2} \in M$ ▯

- da $\mathbb{R}\setminus M$ nicht offen ist, folgt nach Def., dass M <u>nicht abgeschlossen ist</u>

- wie man leicht sieht, gilt

$$\partial M = \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{M} := M \cup \partial M = [-1, 1]$$

$$\mathring{M} := M \setminus \partial M = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

- $M = [-1, 0) \cup (0, 1]$ kann nicht <u>kompakt sein</u>, denn sonst müßte M abgeschlossen sein
$\Rightarrow$ Wdspr. !

(2) <u>Beispiel</u>: $M_n := [\frac{1}{n}, 1]$ ist abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Beh</u>: $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ist nicht abgeschlossen

<u>Bew</u>: • $x_0 = 0 \notin M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 0 \notin M \quad \Rightarrow \quad x_0 \in \mathbb{R}\setminus M$$

- $\forall \varepsilon > 0$ gilt $\quad B_\varepsilon(x_0) \not\subset \mathbb{R}\setminus M$

denn $x = \frac{\varepsilon}{2} \subset [\frac{1}{n}, 1] = M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, d.h. $n > \frac{2}{\varepsilon}$

- $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus M$ ist <u>nicht</u> offen

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ M ist <u>nicht abgeschlossen</u> $\square$