Musterlösungen Blatt 6

(1.) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) := \frac{x}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$

$f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\underline{x \neq 0:}$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + n} > 0 \quad \forall x \in (0,1]$

- $f_n(x)$ ist monoton wachsend
- $f_n(x) \geq 0 \Rightarrow |f_n(x)| = f_n(x)$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n(1)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1+n}}}$$

$$\Rightarrow \|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

d.h. nach Def.: $f_n \to 0$ in $C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ☒

(2.) $\underline{\text{z.z.}}$: $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$ ist Norm auf $C^0([a,b])$

<u>Bew:</u> wir zeigen die Norm-Axiome:

<u>(A1)</u> $\underline{\|f\|_1 = 0 \quad \text{g.d.w.} \quad f = 0}$

- sei $0 = \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$
- <u>angenommen</u>: $\exists x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow |f(x_0)| > 0$

$\xRightarrow{f\text{-stetig}} \exists$ Umgebung $U_\delta(x_0)$: $|f(x)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

$\Rightarrow 0 = \int_a^b |f(x)|\, dx \geq \int_{U_\delta(x_0)} \underbrace{\tfrac{1}{2}|f(x_0)|}_{>0}\, dx > 0$ <u>Wdspr.</u> ↯

$\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ $f(x_0) = 0 \quad \forall\, x_0 \in [a,b]$

$\Rightarrow f = 0$

- sei $f = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = \int_a^b |0|\, dx = 0$

<u>(A2)</u> sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$

<u>z.z.:</u> $\boxed{\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\, \|f\|_1}$

<u>Bew:</u> $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|\, dx = \int_a^b |\lambda| \cdot |f(x)|\, dx$

$= |\lambda| \int_a^b |f(x)|\, dx = |\lambda| \cdot \|f\|_1$ ∎

<u>(A3)</u> z.z.: $\boxed{\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \forall\, f,g \in C^0([a,b])}$

<u>Bew:</u> • nach Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

- nach Def. ist $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$$\Rightarrow \|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x) + g(x)|\, dx$$
$$\leq \int_a^b \{|f(x)| + |g(x)|\}\, dx$$
$$= \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx$$
$$= \|f\|_1 + \|g\|_1$$ ∎

Bl. 6

-3- 3a) $a_n := \Big(\underbrace{(\sqrt[n]{n} - 2)^3}_{a_{n,1}} , \underbrace{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}_{a_{n,2}} \Big)$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,1} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 2)^3 = \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} - 2 \Big)^3$$

$$= (-1)^3 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\Big(\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{x_n} \Big) \overset{\text{sin ist stetig}}{=} \sin\Big(\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{x_n} \Big)$$

$$= \sin(0) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ (da die Komponenten-Folgen konvergent sind)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist <u>konvergent gegen $g = (-1, 0)$</u>.

3b) $a_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}}_{a_{n,1}} , \underbrace{\frac{n^2-2}{4n}}_{a_{n,2}} , \underbrace{2^{-n}}_{a_{n,3}} \Big)$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - \overbrace{\left(\frac{2}{n}\right)}^{\to 0}}{4} = +\infty$$

(da Zähler gegen ∞ strebt)

d.h. <u>Komponenten-Folge</u> $(a_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist <u>divergent</u>

$\Rightarrow$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist <u>divergent</u>.