Musterlösungen Blatt 2

1a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+\tan^2(x))}{1-\cos(x)} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)}{\sin(x)} \to \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{vereinfachen}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan(x)-2\tan^3(x)}{\sin(x)} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\left(1+\tan^2(x)\right)-2\cdot 3\tan^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right)}{\cos(x)} \to \frac{-2}{1}$$

$$\underline{\underline{= -2}}$$

1b) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \to \infty\cdot 0$$

$$\overset{\text{Umformen}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-1)\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1+0}$$

$$\underline{\underline{= 1}}$$

2 a) $f: (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ges: Formel für $f^{(k)}(x)$

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1\cdot(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{(1+x)(1-x)} \overset{\text{Part'bruchzerlg.}}{=} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$= \underline{\underline{(1-x)^{-1} + (1+x)^{-1}}}$$

$$f''(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) + (-1)(1+x)^{-2}$$

$$= \underline{\underline{(1-x)^{-2} + (-1)(1+x)^{-2}}}$$

$$f^{(3)}(x) = (-2)(1-x)^{-3}(-1) + (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$= \underline{\underline{2!\,(1-x)^{-3} + (-1)^2\, 2!\,(1+x)^{-3}}}$$

• Induktionsbehauptung:

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (k-1)!\,(1-x)^{-k} + (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}} \quad (1)$$

• Ind.vor. ist für $k = 1,2,3$ erfüllt (s. oben)

• Ind.schritt $k \to k+1$:

(1) nach x ableiten, liefert:

$$f^{(k+1)}(x) = (-k)(k-1)!\,(1-x)^{-k-1}(-1) + (-1)^{k-1}(-k)(k-1)!\,(1+x)^{-k-1}$$

$$= \underline{\underline{k!\,(1-x)^{-(k+1)} + (-1)^k\, k!\,(1+x)^{-(k+1)}}}$$

also gilt (1) auch für $k := k+1$ $\boxed{\text{q.e.d.}}$

2b) Taylor-Polynom n-ter Ordnung, Entw.p. $a=0$

- aus (1) folgt: $f^{(k)}(0) = (k-1)! \left\{ 1 + (-1)^{k-1} \right\}$

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} \frac{2}{k} & \text{falls } k = 2j+1, \; j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{falls } k = 2j, \; j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

außerdem ist: $f(0) = \ln 1 = 0$

$$\Rightarrow T_n(x) = \sum_{0 \le 2j+1 \le n} \frac{2}{2j+1} (x-0)^{2j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{2}{2j+1} x^{2j+1}$$

denn: $0 \le 2j+1 \le n$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le j \le \frac{n-1}{2}$

Langrange'sches Restglied

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-0)^{n+1}, \quad \xi = \vartheta x, \; \vartheta \in (0,1)$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{n!}{(n+1)!} \left\{ (1-\xi)^{-n-1} + (-1)^n (1+\xi)^{-n-1} \right\} x^{n+1}$$

$$\boxed{R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left\{ \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \right\}} \quad (2)$$

$\xi = \vartheta x, \; \vartheta \in (0,1)$

2c) $\left| f(\tfrac{1}{3}) - T_n(\tfrac{1}{3}) \right| = \left| R_n|_{x=\frac{1}{3}} \right|$

$$= \left| \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{n+1} \left\{ \frac{1}{(1-\frac{\vartheta}{3})^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+\frac{\vartheta}{3})^{n+1}} \right\} \right| , \vartheta \in (0,1)$$

Δ-Ungl.

$$\leq \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{n+1} \left\{ \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^{n+1}} + \frac{|(-1)^n|}{(1+0)^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{n+1} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right\}$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

2d) für $x = \frac{1}{3}$ ist $f(\frac{1}{3}) = \ln(2)$

$$\overset{2c)}{\Longrightarrow} \quad \left| \ln(2) - T_n(\tfrac{1}{3}) \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right\}}_{=: E_n}$$

- $\{E_n\}$ ist eine streng monoton fallende Folge
- somit müssen wir das erste (kleinste) n finden mit $E_n < 10^{-2}$
- durch Berechnung der ersten Glieder $E_1, E_2, \ldots$ findet man: $E_3 = 1.87 \cdot 10^{-2} > 10^{-2}$
  $E_4 = 0.77 \cdot 10^{-2} < 10^{-2}$

$\Rightarrow$ Antwort: Der minimale Grad n, der Fehler $< 10^{-2}$ sichert, ist $\boxed{n=4}$

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 8x + 5$

ges: Taylor-Polynom $T_3(x)$ mit Entw.punkt $a = 1$
u. Lagrange'sches Restglied

- $f(1) = -7$
- $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 32x^3 - 36x^2 + 26x - 8$

  $f'(1) = \cancel{7}\, 0$
- $f''(x) = 30x^4 - 80x^3 + 96x^2 - 72x + 26$

  $f''(1) = 0$
- $f'''(x) = 120x^3 - 240x^2 + 192x - 72$

  $f^{(3)}(1) = 0$
- $f^{(4)}(x) = 360x^2 - 480x + 192$

$$\Rightarrow T_3(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\frac{f^{(k)}(1)}{k!}}_{=0} (x-1)^k$$

$$= f(1) = -7$$

also $\boxed{T_3(x) = -7}$

- Restglied: $R_3 = \frac{1}{4!}\left(360\xi^2 - 480\xi + 192\right)(x-1)^4$

$$= (15\xi^2 - 20\xi + 8)(x-1)^4$$

$$\underline{\underline{= 15\left(\xi^2 - \frac{4}{3}\xi + \frac{8}{15}\right)(x-1)^4}}$$

$$\xi^2 - \frac{4}{3}\xi + \frac{8}{15} = \left(\xi^2 - \frac{4}{3}\xi + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{8}{15} - \frac{4}{9}$$

$$= \left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{45} \geq \frac{4}{45} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow R_3 \geq 15 \cdot \frac{4}{45} (x-1)^4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Minimaleigenschaft an $x=1$:

aus der Taylor-Entw. folgt

$$f(x) = \underbrace{f(1)}_{=T_3(x)} + \underbrace{R_3}_{\geq 0} \geq f(1) = -7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

damit hat f an der Stelle $x=1$ ein globales Minimum.