Musterlösungen Blatt 1

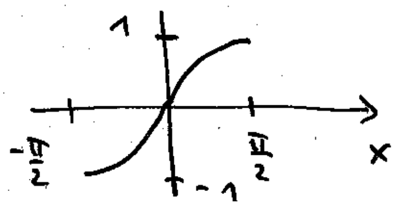
1a) $f(x) = x^{-2}\left(2\sin(3x) + x^3\cos(x)\right)$ [2 Punkte]

$$f'(x) = (-2)x^{-3}\left(2\sin(3x) + x^3\cos(x)\right)$$
$$+ x^{-2}\left(6\cos(3x) + 3x^2\cos(x) + x^3(-\sin x)\right)$$

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$D(f') = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

[2 Punkte]

1b) $f(x) = \arcsin(x)$



- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

  ist bijektiv

  $\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktion

  $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

  also $D(f) = [-1, 1]$

- Berechnung der Ableitung :

$$\arcsin(\underbrace{\sin(x)}_{=:z}) = x \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\arcsin'(z) \cdot \cos(x) = 1$$

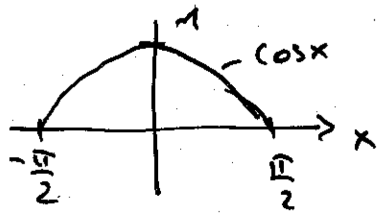
$$\Rightarrow \boxed{\arcsin'(z) = \frac{1}{\cos(x)}}$$ falls $\cos(x) \neq 0$

d.h. falls $x \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$

Blatt 1

-2-

$\cos : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1)$



$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \quad \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \quad (\text{da } \cos(x) > 0)$

wegen $z = \sin(x)$ folgt

$$\boxed{\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \forall z \in (-1,1)$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D(f') = (-1,1)$

2.) $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-2x}$, ges: Monotonie-Intervalle

$$f'(x) = \{(2x-3) + (x^2-3x)\cdot(-2)\} e^{-2x}$$

$$= \{\underbrace{-2x^2 + 8x - 3}_{=: p(x)}\} e^{-2x}$$

- $p(x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel

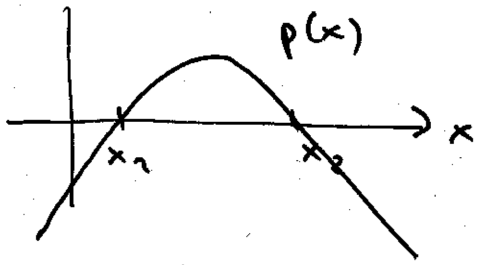
Nullstellen: $-2x^2 + 8x - 3 = 0 \quad |:(-2)$

$x^2 - 4x + \frac{3}{2} = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{2}}$

$x_1 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow$ p - Skizze



- da $e^{-2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hat

$$f'(x) = p(x)\, e^{-2x}$$

dasselbe Vorzeichen wie $p(x)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} > 0, & x \in (x_1, x_2) \\ < 0, & x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \\ = 0, & x \in \{x_1, x_2\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist mon. wachsend nur in $[x_1, x_2]$
$f(x)$ ist mon. fallend in $(-\infty, x_1]$
und in $[x_2, \infty)$

3.) $f: [-1.5, 2.6] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$

- Bestimmung aller lokalen Extremwerte

$\sim$ notwendige Bed. ist $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2$$
$$= 60\left(x^2 - x - 2\right)x^2$$

$\sim$ Nullst. von: $\quad x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

$\Rightarrow$ alle Nullstellen von f' sind

$$x_1 = -1 \, , \; x_2 = 2 \, ; \; x_3 = 0$$

$\leadsto$ hinreichende Bed. dafür, dass x_i lokales Extremum ist, ist

$$f''(x_i) \neq 0$$

$$\leadsto \; f''(x) = \left[60\left(x^4 - x^3 - 2x^2\right)\right]'$$
$$= 60\left(4x^3 - 3x^2 - 4x\right)$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = -180 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{lok. Max. bei } x_1}$$

$$f''(x_2) = f''(2) = 720 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{lok. Min bei } x_2}$$

$f''(x_3) = f''(0) = 0 \quad \Rightarrow$ weitere Ableitungen sind zu untersuchen

$$\leadsto \; f'''(x) = 60\left(12x^2 - 6x - 4\right)$$

$$f'''(0) = -240 \neq 0$$

da die <u>dritte</u> Ableitung von <u>ungerader</u> Ordnung ist, folgt aus $f'''(0) \neq 0$, dass <u>bei</u> $\boxed{x_3 = 0 \text{ ein Sattelpunkt}}$ vorliegt

- Bestimmung des globalen Minimums u. Maximums

$$f_{min} = \min\{f(-1.5), f(2.6), f(2)\}$$
$$= \min\{27.94, \; 97.26, \; -116\} = \underline{\underline{-116}}$$

bei $\underline{x = 2}$

Blatt 1

-5-

$$f_{max} = \max\{f(-1.5), f(2.6), f(-1)\}$$

$$= \max\{27.94, 97.26, 73\} = \underline{\underline{97.26}}$$

bei $\underline{x = 2.6}$