Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

15.01.2014

Wiederholungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 12
(keine Abgabe)

1. Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_1 := 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + 3\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $a_n \le 6$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

2. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{(4n^2+5n+3)(2n+1)}$$

existiert und bestimmen Sie, wenn ja, den Wert von g. (*Hinweis:* nicht ausmultiplizieren)

3. a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 5^k}{k!}$ auf Konvergenz.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k}(x-2)^k$ konvergiert.

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := xe^x - x - \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass f mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt.

5. Berechnen Sie unter Verwendung von Polynomdivision den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 8x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}\,.$$

6. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := \ln(2x+3)$ den grösstmöglichen Definitionsbereich D und den dazugehörigen Wertebereich W und zeigen Sie, dass $f : D \to W$ bijektiv ist. Ermitteln Sie ausserdem die Umkehrfunktion $g : W \to D$ zu f.

7. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $a \in [-1,1]$ die Funktion

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) := \begin{cases} \arccos(x^2), & 0 < x \le 1 \\ (x+2)^{-1}, & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

stetig ist und in welchen nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.