Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 08.01.2014
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 11

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 17.01.2014, zu Beginn der Vorlesung)

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - \exp(-2x).$$
Beweisen Sie, dass f mindestens drei verschiedene reelle Nullstellen im Intervall $[0, 4]$ besitzt.
(**4 Punkte**)

2. a) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$ die folgenden Potenzgesetze für $x > 0$, $y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition von $\log_a x$ für $a > 0$, $a \neq 1$, die folgende Beziehung
$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall\, x > 0.$$
(**4+2 Punkte**)

3. Gegeben sei die Funktion $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} 5 - x & \text{für } \; x < 3, \\ \exp(x-3) + 1 & \text{für } \; x > 3, \\ w & \text{für } \; x = 3, \end{cases}$$
wobei w ein reeller Parameter ist. Untersuchen Sie, für welche Werte von w die Funktion ein globales Minimum und für welche Werte ein globales Maximum besitzt. Geben Sie jeweils im Falle der Existenz den Wert des globalen Minimums bzw. Maximums an. (**4 Punkte**)

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := 1 - 0.6x - \sin(\pi x).$$
Beweisen Sie, dass f mindestens drei verschiedene reelle Nullstellen im Intervall $[0, 2]$ besitzt.

5. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{Q}$ die Formeln:
$$\text{a) } \ln(x^n) = n \cdot \ln(x), \qquad \text{b) } \ln(y^{-1}) = -\ln(y), \qquad \text{c) } \ln(x^r) = r \cdot \ln(x).$$
Verwenden Sie hierzu das Rechengesetz: $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ für $x_1, x_2 \in (0, \infty)$.

6. Zeigen Sie
a) $\ln(2^n) > \dfrac{n}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, (ohne Induktion). b) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$ (mit Hilfe von a)).

7. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichung:
$$2\cos^2(x) - 5\cos(x) = -2\ .$$