

**Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 10**

(abzugeben: Aufgaben 1 - 3 am Freitag, 10.01.2014, zu Beginn der Vorlesung)

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie, wenn möglich, den jeweiligen Grenzwert:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}. \quad (2+2 \text{ Punkte})$$

2. In welchen Punkten $a \in D$ sind die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in welchen nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\text{a) } D = \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } D = [0, 1], f(x) := \begin{cases} x(1-x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (3+3 \text{ Punkte})$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$. Finden Sie für $\varepsilon = 10^{-2}$ und jeden der Punkte $a = 0.2$ und $a = 20$ jeweils ein maximales $\delta_{\max} > 0$, so dass für $|x - a| < \delta_{\max}$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(4 Punkte)

4. a) Beweisen Sie mit Hilfe der ε - δ -Definition die Stetigkeit der Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}$. Verwenden Sie hierzu die bereits bewiesene Ungleichung

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

- b) In welchen Punkten $a \in D$ ist die folgende Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in welchen nicht?

$$D = [0, \infty), \quad f(x) := \sqrt{\exp(x) - 1}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Bestimmen Sie - wenn möglich - die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+9}{x^2-9}.$$

6. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit in allen Punkten aus \mathbb{R} :

$$f(x) := \text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0; \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x < 1 \\ 3-x, & x \geq 1. \end{cases}$$