Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck 11.12.2013

**Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt**
**Wintersemester 2013/14 - Blatt 9**

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 20.12.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^8 z^k; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-i)^k}{\sqrt{k}} z^k; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3}(x-4)^k.$$
Untersuchen Sie für die dritte Potenzreihe das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls. **(1+1+2 Punkte)**

2. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ werden im Komplexen definiert über die Potenzreihen:
$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$
Zeigen Sie für beliebige $z \in \mathbb{C}$ die Beziehungen (für b) und c) verwende man a) und Aussagen über $\sin(-z)$ und $\cos(-z)$):
   a) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$,
   b) $\sin(z) = \frac{1}{2i}\{\exp(iz) - \exp(-iz)\}$,
   c) $\cos(z) = \frac{1}{2}\{\exp(iz) + \exp(-iz)\}$. **(3+2+2 Punkte)**

3. Zeigen Sie mit Hilfe von Additionstheoremen für $x, y \in \mathbb{R}$:
   a) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
   b) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$. **(2+2 Punkte)**

4. Bestimmen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren, absolut konvergieren bzw. divergieren:
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}(z-1)^k; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x+3)^k.$$

5. Für $x \in \mathbb{R}$ werden die Hyperbelfunktionen wie folgt definiert:
$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big), \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big).$$
Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $a = 0$ für $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ und zeigen Sie:
   a) $\cosh(x)^2 = 1 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Beweisen Sie
$$\exp(r) = e^r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } \quad e := \exp(1).$$