Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck 27.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 7

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 06.12.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^{3/2}} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{k^2+2k+1} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bei c) sind alle $x \in \mathbb{R}$ anzugeben, für die die Reihe konvergiert bzw. absolut konvergiert.

(**2+1+3 Punkte**)

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produktes von Reihen, dass für reelles q mit $0 < q < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(**4 Punkte**)

3. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x) := \begin{cases} 2x-1 & , \quad x \leq 2, \\ x+1 & , \quad x > 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und bestimmen Sie die Abbildung f^{-1}.

(**4 Punkte**)

4. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k+1}{3k^4-k^3+5k} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^5}{2^k+5^k} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k,\ x \in \mathbb{R}.$$

5. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes berechne man

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-q)^k\right),$$

wobei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

6. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ injektiv ist. Bestimmen Sie ihren Wertebereich $W = f(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$. Wie lautet die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to \mathbb{R}$?

7. Skizzieren Sie den Graph der Abbildung $f : [-3, 3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto [x]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.