Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

20.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 6

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 29.11.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}| \qquad \forall\, n \geq 2,$$

wobei $0 \leq q < 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $|a_{n+1} - a_n| \leq q^{n-1}|a_2 - a_1|$ und $a_{n+\ell} - a_n = \sum_{k=n}^{n+\ell-1} (a_{k+1} - a_k)$ für $\ell \in \mathbb{N}$.

(**4 Punkte**)

2. a) Seien $z_n \in \mathbb{C}$ die Glieder einer komplexen Zahlenfolge mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Beweisen Sie, dass dann gilt $\overline{z_n} \to \overline{z}$ und $|z_n| \to |z|$ für $n \to \infty$.

   b) Untersuchen Sie für jede der beiden komplexen Zahlenfolgen, ob sie konvergent oder divergent ist:

$$z_n = \frac{1}{(1+i)^n}, \qquad \text{und} \qquad w_n = \frac{1}{i^n}.$$

(**2+2 Punkte**)

3. a) Bestimmen Sie die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ und anschließend den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$.

(**2+2 Punkte**)

4. Für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Man zeige, dass dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. *Hinweis:* Man zeige und nutze $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|a_n - a|}$.

5. Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

eine Cauchy-Folge ist. Weisen Sie hierzu zunächst nach, dass $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$.

6. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+k}{k^3+k^2}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.