Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck 13.11.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 5

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 22.11.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Berechnen Sie (durch Umformung von a_n) die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder beweisen Sie deren Divergenz:

$$\text{a) } a_n = \frac{(-1)^n n^2}{7n^2+1}; \qquad \text{b) } a_n = \frac{2^n+3^n}{5^n}; \qquad \text{c) } a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

(**3 Punkte**)

2. Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ in folgenden Schritten:

   a) Zeigen Sie zunächst, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq \sqrt[2n]{n} - 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Wenden Sie zum Nachweis der zweiten Ungleichung die Bernoullische Ungleichung mit $x = \sqrt[2n]{n} - 1$ an.

   b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) und der ε-Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = 1$.

   c) Folgern Sie aus b) die Behauptung.

(**2+2+1 Punkte**)

3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 := \sqrt{2}$ und die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} := \sqrt{2+a_n} \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Weshalb existiert der Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} a_n$? Quadrieren Sie die Rekursionsgleichung (1) und bestimmen Sie mit Hilfe von Grenzwertsätzen den Wert des Grenzwertes g.

(**4 Punkte**)

4. Konstruieren Sie zu einer beliebigen reellen Zahl $w \in (0,1)$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen die Zahl $x = \sqrt[3]{w}$ konvergiert. Wenden Sie hierzu das Newton-Verfahren auf die Gleichung

$$f(x) = x^3 - w = 0$$

mit dem Start-Wert $x_1 = 1$ an.

   a) Geben Sie konkret die Rekursionsgleichung für das nächste Folgenglied x_{n+1} in Abhängigkeit von x_n an.

   b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Weshalb existiert der Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} x_n$? Zeigen Sie, dass der Grenzwert $g = \sqrt[3]{w}$ ist.

5. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder beweisen Sie deren Divergenz:

$$\text{a) } a_n = \frac{n^3+2n}{5n^5+2}; \qquad \text{b) } a_n = 4n^2 - 6n; \qquad \text{c) } a_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n).$$