Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

01.11.2013

**Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt**
**Wintersemester 2013/14 - Blatt 4**

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 15.11.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

   a) $|z| < 1 - \mathrm{Re}(z)$;  b) $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 2$.

   Skizzieren Sie diese Mengen in der komplexen Ebene. (**3+3 Punkte**)

2. Seien $p, q \in \mathbb{C}$, $D := \frac{p^2}{4} - q$ und $w \in \mathbb{C}$ eine Wurzel aus $D$, d.h. es gelte $w^2 = D$.

   a) Zeigen Sie, dass die beiden komplexen Zahlen $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm w$ Lösungen der quadratischen Gleichung
   $$z^2 + p \cdot z + q = 0. \tag{1}$$
   sind.

   b) Berechnen Sie für $p = -4 - i$ und $q = 5 + 5i$ die zugehörige Zahl $D$ und geben Sie $\mathrm{Re}(D)$ und $\mathrm{Im}(D)$ an.

   c) Bestimmen Sie zu $D$ aus 2b) eine Zahl $w \in \mathbb{C}$, so dass $w^2 = D$, und geben Sie entsprechend 2a) die Lösungen $z_{1,2}$ der quadratischen Gleichung (1) an.

   (**1+2+3 Punkte**)

3. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Vorschrift: $a_n := \dfrac{n^2-1}{3n^2+1}$.

   a) Stellen Sie durch Einsetzen großer Werte von $n$ eine Vermutung auf für den Wert des Grenzwertes $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   b) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Hilfe der $\varepsilon$-Definition. (**1+3 Punkte**)

4. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Ungleichung
   $$|z - i| < |z + i|$$
   genügen und skizzieren Sie die entsprechende Menge in der komplexen Ebene.

5. Bestimmen Sie (wie in der Vorlesung) alle Zahlen $w \in \mathbb{C}$, so dass $w^2 = -2i$.

6. Beweisen Sie mit Hilfe der $\varepsilon$-Definition, dass

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + n^2 - 5n + 3}{6n^3 - 4n^2 + 5n - 1} = \dfrac{1}{2}$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.