Otto-von-Guericke Universität Magdeburg 29.10.2013
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 3

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 08.11.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen stets wahr sind. Wenn ja, so beweisen Sie dies; wenn nein, so geben Sie ein Gegenbeispiel an. Dabei seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen.

   a) Ist x rational und y irrational, so ist die Summe $x+y$ irrational.

   b) Sind x und y irrational, so ist das Produkt xy rational. (**4 Punkte**)

2. Seien x und y zwei beliebige nichtnegative reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung
$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}.$$
(**4 Punkte**)

3. Seien M und N nichtleere, nach unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   a) Die Menge $-M := \{-x \,|\, x \in M\}$ ist nach oben beschränkt und $\sup(-M) = -\inf M$.

   b) Ist $M \subset N$, so gilt $\inf N \leq \inf M$.

   (**2+2 Punkte**)

4. Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis, dass für alle $x \geq 0$, $y \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   a) $x < y \Longrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$;

   b) $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$; (Hinweis: Binomischer Lehrsatz)

   Verwenden Sie dazu die Aussage aus Aufgabe 4b) von Blatt 2, dass: $x < y \Longrightarrow x^n < y^n$.

5. Seien a und s zwei positive reelle Zahlen, so dass $s^2 > a$. Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad (s-\frac{1}{n})^2 > a \quad \text{und} \quad s-\frac{1}{n} > 0.$$

6. Sei M die folgende Menge komplexer Zahlen
$$M := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}.$$
Skizzieren Sie M sowie die folgenden Mengen in der Gauß'schen Zahlenebene:

   $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = 2w,\ w \in M\}$ und $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = w + (1-2i),\ w \in M\}$.