Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. F. Schieweck

22.10.2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I für Physiker und Lehramt
Wintersemester 2013/14 - Blatt 2

(**abzugeben:** Aufgaben **1 - 3** am Freitag, 01.11.2013, zu Beginn der Vorlesung)

1. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   a) $\prod_{k=0}^{n}(1 + a^{2^k}) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$ für $a \in \mathbb{R}, a \neq 1$;

   b) $n < 2^n$. (**4 Punkte**)

2. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 1.$$

(**4 Punkte**)

3. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{\frac{2|x|}{2 + |x|} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

beschränkt ist und bestimmen Sie Supremum und Infimum. Prüfen Sie auch, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt. (**4 Punkte**)

4. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

   a) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Aus $x, y \geq 0$ und $x < y$ folgt $x^n < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5. Beantworten Sie für die nachfolgenden Mengen folgende Fragen: Ist M nach oben bzw. nach unten beschränkt? Wenn ja, geben Sie $S = \sup M$ bzw. $I = \inf M$ an und beweisen Sie, dass S das Supremum bzw. I das Infimum von M ist. Hat M ein Maximum bzw. ein Minimum? Wenn ja, welches?

   a) $M := \{1 - \frac{3}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

   b) $M := \{\frac{x}{1+x} \,|\, x \in \mathbb{R},\, x > -1\}$

6. Finden Sie in Abhängigkeit von n eine Formel für

$$P_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

und beweisen Sie diese mit Hilfe vollständiger Induktion.