Blatt 1

Aufgabe 1

a)
z.zg.: Die Aussage $T_1 := [\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$ ist immer wahr.
Bew.:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	T_1
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

b)
z.zg.: Die Aussage $T_2 := [A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ ist immer wahr.
Bew.:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	T_2
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

$\square$

Aufgabe 2

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$
a)
z.zg.:

$$[(b \geq 0) \wedge (a^2 \leq b^2)] \Rightarrow (a \leq b)$$

Bew.:
Für den Beweis, wird die Tautologie $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$ verwendet, welche sich direkt aus den Wahrheitstafeln in Aufgabe 1 ablesen lässt. Dabei ist A als $[(b \geq 0) \wedge (a^2 \leq b^2)]$ und B als $(a \leq b)$ aufzufassen.
Angenommen die Aussage B gelte nicht, das heißt, es gilt $a > b$. Unter der Annahme, dass $b = 0$ gilt, folgt mit I.4. (O4) und I.3.1 (a):

$$a^2 = a \cdot a > 0 = b^2$$

und falls $b > 0$ gilt, dann ist mit I.4. (O4).

$$a^2 = a \cdot a > a \cdot b > b \cdot b = b^2$$

Somit gilt nach der Regel von de Morgan (I.1.3) die Aussage $\neg A$.

$\square$

b)
z.zg.:

$$[a^2 \leq b^2] \Rightarrow [|a| \leq |b|]$$

Bew.:
Es sei $A = |a|$ und $B = |b|$, dann gilt mit I.3.1 (c)

$$A^2 = a^2 \leq b^2 = B^2$$

Nun kann Aufgabe 2a) auf A und B, anstatt auf a und b angewandt werden, und es folgt die Behauptung.

$\square$

Aufgabe 3

a)

$$|2x - 1| < |x - 1|$$

Fall 1:
$2x - 1 \geq 0$ und $x \geq 1$, also $\underline{x \geq 1}$, dann ist:

$$2x - 1 < x - 1 \Leftrightarrow x < 0$$

im Widerspruch zu $x \geq 1$, also gilt $L_1 = \emptyset$.
Fall 2:
$2x - 1 \geq 0$ und $x < 1$, also $\underline{x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)}$, dann ist:

$$2x - 1 < -x + 1 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

und es folgt: $L_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
Fall 3:
$2x - 1 < 0$ und $x \geq 1$ ist nicht erfüllbar, und es folgt $L_3 = \emptyset$.
Fall 4:
$2x - 1 < 0$ und $x < 1$, also $\underline{x < \frac{1}{2}}$, dann ist:

$$-2x + 1 < -x + 1 \Leftrightarrow x > 0$$

und es folgt $L_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$
Insgesamt ist dann die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$
b)

$$2 - x^2 \geq |x|$$

Fall 1:
$x \geq 0$, dann ist:
$$2 - x^2 \geq x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + x - 2}_{=:f(x)} \leq 0$$
Die Abbildung f ist eine nach oben geöffnete Parabel, bestimme die Nullstellen von f:
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
also $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. Da $x \geq 0$ gilt, ist $L_1 = [0, 1]$.
Fall 2:
$x < 0$, dann ist:
$$2 - x^2 \geq -x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x - 2}_{=:g(x)} \leq 0$$
Die Abbildung g ist auch eine nach oben geöffnete Parabel, bestimme wieder die Nullstellen von g:
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
also $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$. Da $x < 0$ gilt, ist $L_1 = [-1, 0)$.
Insgesamt ist dann die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = [-1, 1]$

Aufgabe 4

a)
z.zg.: Die Aussage $T_1 := [(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg B)] \Leftrightarrow (\neg A)$ ist immer wahr.
Bew.:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg B$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (\neg B)$	$\neg A$	T_1
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

$\square$

b)
z.zg.: Die Aussage $T_2 := [A \wedge (\neg B \Rightarrow C) \wedge (\neg(C \wedge A))] \Rightarrow B$ ist immer wahr.

Bew.:

A	B	C	$\neg B \Rightarrow C$	$\neg(C \wedge A)$	$A \wedge (\neg B \Rightarrow C) \wedge (\neg(C \wedge A))$	T_2
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

□

Aufgabe 5

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$
a)
z.zg.:

$$0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

Bew.:
Für $a = 0$ folgt die Behauptung direkt aus I.3.1 (a) und I.4 (O4). Ist $a > 0$, dann gilt mit I.4 (O4):

$$a^2 = a \cdot a < a \cdot b < b \cdot b = b^2$$

□

b)
z.zg.:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Bew.:
Fall 1:
$a \geq 0$ und $b \geq 0$, dann gilt mit I.3.1 (a) und I.4 (O4):

$$|a| \cdot |b| = a \cdot b = |a \cdot b|$$

Fall 2:
$a \geq 0$ und $b < 0$, dann gilt mit I.3.1 (a) und I.4 (O4):

$$|a| \cdot |b| = a \cdot (-b) \overset{Distributivgesetz}{=} -(a \cdot b) = |a \cdot b|$$

Hierbei wurde verwendet, dass $[(x > 0) \wedge (y < 0)] \Rightarrow (x \cdot y < 0)$. Dies folgt aus:

$$0 < x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

Fall 3:
$a < 0$ und $b \geq 0$, entspricht wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ (I.3) dem Fall 2.
Fall 4:
$a < 0$ und $b < 0$, dann gilt mit I.3.1 (a) und I.4 (O4):

$$|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) \overset{Distributivgesetz}{=} -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b = |a \cdot b|$$

□

Aufgabe 6

a)

$$3 + x > x^2 \Leftrightarrow 0 > \underbrace{x^2 - x - 3}_{=:f(x)}$$

Die Abbildung f ist eine nach oben geöffnete Parabel, bestimme die Nullstellen von f:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

und es folgt $L = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.
b)

$$|x| \geq |x - 2|$$

Fall 1:
$x \geq 0$ und $x \geq 2$, also $\underline{x \geq 2}$, dann ist:

$$x \geq x - 2 \Leftrightarrow 2 \geq 0$$

und es folgt: $L_1 = [2, \infty)$
Fall 2:
$x \geq 0$ und $x < 2$, also $\underline{x \in [0, 2)}$, dann ist:

$$x \geq -x + 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$$

und es folgt: $L_2 = [1, 2)$
Fall 3:
$x < 0$ und $x \geq 2$, ist nicht erfüllbar, das heißt $L_3 = \emptyset$.
Fall 4:
$x < 0$ und $x < 2$, also $\underline{x < 0}$, dann ist:

$$-x \geq -x + 2 \Leftrightarrow 0 \geq 2$$

woraus $L_4 = \emptyset$ folgt.
Insgesamt ist die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = [1, \infty)$

c)

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \qquad\qquad \text{für } x \neq 1$$

<u>Fall 1:</u>
$x > 1$, dann ist:

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow x+1 > x-1 \Leftrightarrow 1 > -1$$

und es folgt: $L_1 = (1, \infty)$
<u>Fall 2:</u>
$x < 1$, dann ist

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow x+1 < x-1 \Leftrightarrow 1 < -1$$

und es folgt: $L_2 = \emptyset$.
Insgesamt ist die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = (1, \infty)$