Blatt 10

Aufgabe 4

a)
Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ mit $f(x) = \sqrt{x}$.
z.zg.: f ist stetig.
Bew.:
Es sei $\epsilon > 0$ und $x, y \in (0, \infty)$, dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \epsilon$$

falls $|x - y| < \epsilon^2 =: \delta(\epsilon)$.

$\square$

b)
Die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{\exp(x) - 1}$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen (überall) stetig.

Aufgabe 5

a)
Für $x > 0$ gilt:

$$\left| \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} \right| = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x + x^2} + \sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

daraus folgt: $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = 0$.
b)
Zunächst wird bemerkt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $(2 - x)(x^2 + 2x + 4) = 8 - x^3$ gilt, dann ist für $x \neq 2$:

$$\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} = \frac{x^2 + 2x + 4}{8 - x^3} - \frac{12}{8 - x^3} = \frac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(2 - x)(x^2 + 2x + 4)}$$

Mit der Gleichung $-(2 - x)(x + 4) = x^2 + 2x - 8$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} = -\frac{x + 4}{x^2 + 2x + 4}$$

und damit insbesondere

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} \right) = -\frac{1}{2}$$

c)

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{3, -3\}$:

$$\frac{3x+9}{x^2-9} = \frac{3(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3}{x-3}$$

somit existiert $\lim_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9}$ nicht.

Aufgabe 6

a)
Es sei $sign : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$sign(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist für alle $x > 0$ und für alle $x < 0$ als stückweise konstante Funktion stetig. In $x = 0$ ist die Abbildung jedoch nicht stetig, denn

$$\lim_{x \searrow 0} sign(x) = 1 \neq 0 = sign(0)$$

b)
Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x < 1 \\ 3-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Die Funktion ist für alle $x < 0$, für alle $x \in (0,1)$ und für alle $x > 1$ als Funktion der Form $y = mx + n$ stetig. An den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ ist die Abbildung jedoch nicht stetig, denn

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 3 \neq 2 = f(1)$$