Musterlösungen Blatt 10

1a) $g = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$

$$
\begin{array}{l}
2x^2 + 2x - 4 : (x-1) = 2x + 4 \\
\underline{2x^2 - 2x} \\
\quad 4x - 4 \\
\quad \underline{4x - 4} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow g = \lim_{x \to 1} \underbrace{(2x+4)}_{\text{stetig}} = 2 \cdot 1 + 4 = \underline{\underline{6}}$

1b) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$:

<u>1. Folge:</u> $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{|x_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1/n} = \underline{\underline{1}}$

<u>2. Folge:</u> $x_n = -\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{|x_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{-1/n}{1/n} = \underline{\underline{-1}}$

- wenn der Grenzwert existieren würde, so müßten alle Folgen $\frac{x_n}{|x_n|}$ gegen denselben Wert konvergieren;
  die obigen 2 Folgen liefern einen Widerspruch

$\Rightarrow$ <u>der Grenzwert existiert nicht!</u>

2a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

<u>1. Fall</u> $a \neq 0$

$\Rightarrow$ in Umgebung $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $\delta < \frac{1}{2}|a|$ gilt

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = f_1(x) \cdot f_2(f_3(x))$$

wobei

$f_1(x) = x$ stetig in allen $a \in \mathbb{R}$

$f_2(x) = \sin(x)$ — " —

$f_3(x) = \frac{1}{x}$ stetig in allen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ <u>f ist stetig in $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</u> !

<u>2. Fall</u> $a = 0$

- Stetigkeit in $a=0$ ist äquivalent zu

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = f(0) = 0} \qquad (1)$$

- Nachweis von (1):

$$\left| f(x) - f(0) \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \right|}_{\leq 1} \leq |x| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \; |f(x) - f(0)| < \varepsilon \quad \forall \; |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ <u>f ist stetig in $a = 0$</u> !

2b) $D = [0,1]$, $f(x) := \begin{cases} x(1-x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

<u>1. Fall</u> $a = 0$

Stetigkeit ist äquivalent zu $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ (da $0 \in \mathbb{Q}$)

$$|f(x) - f(0)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x| \cdot |1-x|, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} \leq |x| \cdot \underbrace{|1-x|}_{\leq 1} \leq |x| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : |f(x) - f(0)| < \varepsilon \ \forall |x - 0| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow$ <u>f ist stetig in $a = 0$</u> !

<u>2. Fall</u> $a = 1$

- da $a = 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(1) = 1 \cdot (1 - 1) = 0$
- analog zu Fall 1 gilt wieder

$$|f(x) - f(0)| \leq \underbrace{|x|}_{\leq 1} \cdot |1 - x| \leq |x - 1| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0 : |f(x) - f(0)| < \varepsilon \ \forall |x - 1| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow$ f ist stetig in $a = 1$

<u>3. Fall:</u> $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(a) = a(1 - a) > 0$

- wir betrachten die Folge $x_n = \underbrace{a}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{n}}_{\notin \mathbb{Q}} \notin \mathbb{Q}$

$\leadsto$ es gilt $x_n \to a$, $n \to \infty$

$\leadsto f(x_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$

$\Rightarrow$ <u>f ist nicht stetig in a</u> !

<u>4. Fall</u>: $0 < a < 1$, $a \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f(a) = 0$

- wir betrachten eine Folge $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$

dann gilt $f(x_n) = x_n(1 - x_n) \xrightarrow{n \to \infty} a(1 - a) > 0 \neq f(a)$

$\Rightarrow$ <u>f ist nicht stetig in a</u> !

3.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $\varepsilon = 10^{-2}$

Fall $a = 0.2$

Ziel: $\boxed{|f(x) - f(0.2)| < 10^{-2} \quad \forall\, |x - 0.2| < \delta}$ (1)

$$\Leftrightarrow \quad |x^2 - 0.04| < 0.01$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.03 < x^2 < 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{0.03} < |x| < \sqrt{0.05}$$

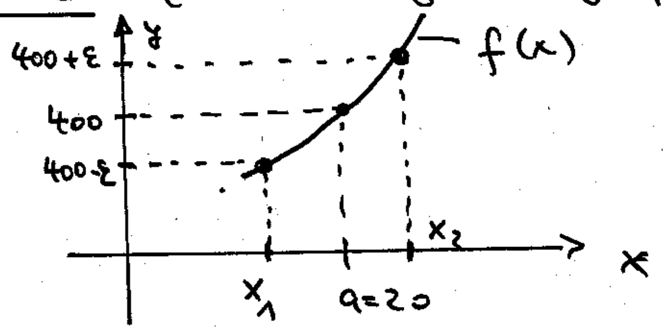
$$\Leftrightarrow \quad x \in \underbrace{\left(\sqrt{0.03}, \sqrt{0.05}\right)}_{\text{Fall } x > 0} \cup \underbrace{\left(-\sqrt{0.05}, -\sqrt{0.03}\right)}_{\text{Fall } x < 0}$$

- es gilt $a = 0.2 = \sqrt{0.04} \in \left(\sqrt{0.03}, \sqrt{0.05}\right)$

$\Rightarrow$ das größte δ, so dass (1) gilt, ist

$$\delta_{max} = \min\{0.2 - \sqrt{0.03}, \sqrt{0.05} - 0.2\}$$
$$= \min\{0.02679\ldots, 0.0236\ldots\} \approx \underline{\underline{0.0236}}$$

Fall $a = 20$ (anderer Weg über grafische Lösung)



nicht maßstabsgetreu

sei $x_1 > 0$, so dass $f(x_1) = x_1^2 = 400 - \varepsilon \Rightarrow x_1 = \sqrt{400 - 0.01}$

und $x_2 > 0$, —"— $f(x_2) = x_2^2 = 400 + \varepsilon \Rightarrow x_2 = \sqrt{400{,}01}$

$$\Rightarrow \delta_{max} = \min\{20 - x_1, x_2 - 20\} = \min\{2.50..10^{-4}, 2.49998..10^{-4}\}$$
$$\approx \underline{\underline{2.49998 \cdot 10^{-4}}}$$