Musterlösungen Blatt 9

1 a) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{k^8}}_{=:a_k} z^k$

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^8}{k^8} = \lim_{k\to\infty} (1 + \underbrace{\tfrac{1}{k}}_{\to 0})^8 = \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$ Konv'radius ist $r = \frac{1}{q} = \underline{\underline{1}}$

1 b) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(3-i)^k}{\sqrt{k}}}_{=:a_k} z^k$

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|3-i|^{k+1}}{|3-i|^k} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{|3-i|}_{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

$$= \lim \sqrt{10} \sqrt{\frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0}}} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}$$

$\Rightarrow$ Konv'radius ist $r = \frac{1}{q} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}}}}$

1 c) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^k}{3}}_{=:a_k} (x-4)^k$, Entwicklungspunkt $x_0 = 4$

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{3}{3} = \underline{\underline{2}}$$

$\Rightarrow$ Konv'radius: $r = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Konv'intervall $= (4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}) = (3{,}5, 4.5)$

<u>Randpunkt $x = 3.5$:</u>

$$\text{Reihe} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(-1)^k}{3}}}_{=:b_k}$$

$|b_k| = \frac{1}{3}$ strebt nicht nach Null $\Rightarrow$ notw. Konv'kriterium verletzt

Bl. 9
-2-

$\Rightarrow$ für $x = 3{,}5$ ist die Reihe divergent

<u>Randpunkt $x = 4{,}5$:</u>

$$\text{Reihe} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \text{Reihe ist divergent}$$

keine Nullfolge

2a) $$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad ; \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

$$\left.\begin{aligned} (iz)^{2k} &= (i^2)^k z^{2k} = (-1)^k z^{2k} \\ (iz)^{2k+1} &= i(i^2)^k z^{2k+1} = i(-1)^k z^{2k+1} \end{aligned}\right\} (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp(iz) &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ (n=2k)}}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (iz)^{2k} + \sum_{\substack{k=0 \\ (n=2k+1)}}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (iz)^{2k+1} \\ &\overset{(1)}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}} \\ &= \cos(z) + i \sin(z) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2b) und c)}}$ Aus den Reihen-Definitionen von $\sin(z)$, $\cos(z)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} \sin(-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \underbrace{(-z)^{2k+1}}_{= -z^{2k+1}} = -\sin(z) \\ \cos(-z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \underbrace{(-z)^{2k}}_{= z^{2k}} = \cos(z) \end{aligned}\right\} (2)$$

Aus 2a) folgt, indem man z durch $(-z)$ ersetzt:

$$\exp(-iz) = \exp(i(-z)) = \cos(-z) + i\sin(-z)$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)} \qquad (3)$$

addiert man (3) und

$$\boxed{\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)} \qquad (4)$$

so erhält man:

$$\exp(iz) + \exp(-iz) = 2\cos(z) \Longrightarrow 2c)$$

subtrahiert man (3) von (4), so folgt

$$\exp(iz) - \exp(-iz) = 2i\sin(z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin(z) = \frac{1}{2i}\left\{\exp(iz) - \exp(-iz)\right\}}$$ dies ist 2b)

3.) sei $\alpha = \frac{x+y}{2}$ und $\beta = \frac{x-y}{2}$

dann gilt $\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= \alpha - \beta \end{aligned}}$

- nach Additionstheorem gilt

$$\sin(x) = \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(y) = \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

dies ist 3a)

- nach Additionstheorem gilt auch:

$$\cos(x) = \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(y) = \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

dies ist 3b)