Musterlösungen Blatt 8

1a) $(3x^5 - x^4 + 8x^2 - 1) : (x^3 + x^2 + x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$\begin{array}{l}
\underline{3x^5 + 3x^4 + 3x^3} \\
\quad -4x^4 - 3x^3 + 8x^2 \\
\quad \underline{-4x^4 - 4x^3 - 4x^2} \\
\qquad x^3 + 12x^2 - 1 \\
\qquad \underline{x^3 + x^2 + x} \\
\qquad\quad 11x^2 - x - 1 =: r(x)
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^5 - x^4 + 8x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} = \underline{\underline{3x^2 - 4x + 1 + \frac{11x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x}}}$$

1b) $\underbrace{\frac{p(x)}{x-2}}$ $= (x^3 - 6x^2 + 7x + 2) : (x - 2) = x^2 - 4x - 1$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad -4x^2 + 7x \\
\quad \underline{-4x^2 + 8x} \\
\qquad -x + 2 \\
\qquad \underline{-x + 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

also $\boxed{x_1 = 2}$ ist Nullstelle

- Bestimmung der restlichen Nullstellen aus:

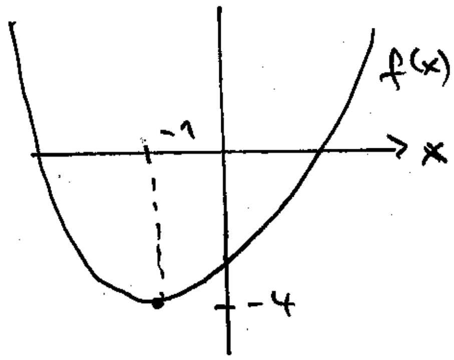
$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 2 - \sqrt{5} \\ x_3 = 2 + \sqrt{5} \end{array}}$$

2a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$= (x+1)^2 - 4 \rightarrow$ ist Parabel nach oben geöffnet mit Minimum $x_0 = -1$



$f(-1) = \underline{\underline{-4}}$

man sieht:
- f ist im Intervall $[-1, \infty)$ streng mon. wachsend
- f ist im Intervall $(-\infty, -1]$ streng mon. fallend

$\Rightarrow$ das kleinste a, so dass f auf $[a, \infty)$ streng mon. wachsend ist, ist $\boxed{a = -1}$, Umkehrfkt. siehe S. 2a $\Rightarrow$

2b) geg: $f, g : D \to \mathbb{R}$ streng mon. wachsend

Frage: ist dann auch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ streng mon. wachsend

Antwort: nein, denn es gibt folgendes Gegenbeispiel:

$f(x) = g(x) = x + 1$ mit $D = (-\infty, -1]$

sind beide auf D streng mon. wachs.

aber: $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1)^2$ ist auf D streng mon. fallend

Bl. 8
-2a-

<u>**zu 2a)**</u> <u>Umkehrfunktion zu $f:[a,\infty)\to W$, $a=-1$</u>

- Bestimmung des Wertebereiches : (siehe Skizze)

$$W=\{f(x)=(x+1)^2-4 \mid x\in[-1,\infty)\}=[f(-1),\infty)=\underline{\underline{[-4,\infty)}}$$

- Ermittlung der Umkehrfkt. $f^{-1}:[-4,\infty)\to[-1,\infty)$

$\sim$ sei $y\in[-4,\infty)$ und $x\in[-1,\infty)$ sowie

$$y=f(x)=(x+1)^2-4 \quad \mid +4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=y+4\geq 0 \quad \mid \sqrt{\ldots}$$

$$\xRightarrow{x+1\geq 0} x+1=\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow x=\boxed{\sqrt{y+4}-1=f^{-1}(y)}$$

3.) $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) := \begin{cases} |x| - 1, & -2 \le x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

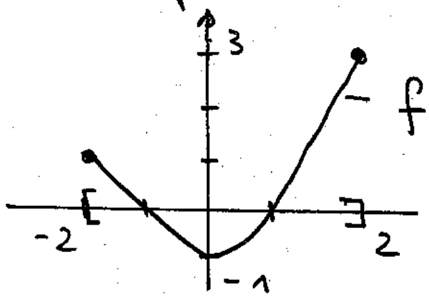
- sei $x \in [-2,0)$:

  $\Rightarrow f(x) = -x - 1$ streng mon. fallend $\Rightarrow f([-2,0)) = (-1, 1]$

- sei $x \in [0,2]$

  $\Rightarrow f(x) = x^2 - 1$ streng mon. wachs. auf $(0,2]$ $\Rightarrow f([0,2]) = [-1,3]$

$\Rightarrow$ Skizze:



- Wertebereich:

$$W = f([-2,2]) = f([-2,0)) \cup f([0,2])$$
$$= (-1,1] \cup [-1,3] \quad = \underline{\underline{[-1,3]}}$$

- Beschränktheit:

  aus $f([-2,2]) = [-1,3]$ folgt

  $$|f(x)| \le 3 \quad \forall x \in [-2,2]$$

  $\Rightarrow f$ ist auf $[-2,2]$ <u>beschränkt</u>

- <u>Monotonie:</u>

  f ist auf $[-2,0)$ streng mon. fallend

  u. auf $[0,2]$ streng mon. wachsend