Musterlösungen Blatt 7

1a) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^{3/2}}}_{=:a_k}$, beachte $a_k > 0 \quad \forall k$

$$|a_k| = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{k^{3/2}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\,k^{3/2}}$$

$$\leq \frac{1}{(\sqrt{k}+\sqrt{k})\,k^{3/2}} = \frac{1}{2k^2}$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$ ist konvergente Majorante zu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist <u>absolut konvergent</u> $\Rightarrow$ <u>konvergent</u>

1b) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{k+1}{k^2+2k+1}}_{=:a_k}$ $\qquad a_k = (-1)^k b_k \;,\; b_k > 0$

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist eine <u>alternierende Reihe</u>
- $b_k = \frac{k+1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}$ $\Rightarrow (b_k)$ ist eine <u>monoton fallende Nullfolge</u>
- nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- $|a_k| = b_k = \frac{1}{k+1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \overset{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j}$ = harmonische Reihe ohne ersten Glied

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist <u>divergent</u>

1c) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2 x^k}_{=:a_k}$, $x \in \mathbb{R}$

- $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 |x|$

$$= (1 + \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{k}}}_{\to 0})^2 |x| \xrightarrow{k\to\infty} (1+0)^2|x| = |x| = q$$

- nach Quotientenkriterium folgt damit:

  ~ falls $q < 1$, also falls $\boxed{|x| < 1}$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut u. im normalen Sinne

  ~ falls $q > 1$, also falls $\boxed{|x| > 1}$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- der Fall $|x| = 1$:

  $\Rightarrow |a_k| = k^2 |x|^k = k^2 \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

  $\Rightarrow$ das notwendige Konvergenzkriterium ist verletzt, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

  $\Rightarrow$ im Fall $|x| = 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Zusammenfassung:

- für $x \in (-1,1)$ ist die Reihe absolut konvergent u. damit auch konvergent
- für alle anderen $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ divergiert die Reihe

(2.) Sei $q \in (0,1)$

z.z. $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^k = \frac{1}{(1-q)^2}} \qquad (1)$$

Bew.:

- bekannt ist: $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \forall |q| < 1$

- nach dem Cauchy-Produkt von Reihen (ist hier anwendbar, da $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut konvergent ist) gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{q^{n-k} \cdot q^k}_{= q^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, q^n$$

durch Umbezeichnung $n \to k$ folgt die Behauptung (1) ▯

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$

z.z.: f ist bijektiv

- die Funktion $f_1(x) = 2x-1$ ist offensichtlich streng monoton wachsend, denn aus $x_1 < x_2$ folgt $2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$
- $f_1(2) = 3$
- die Funktion $f_2(x) = x+1$ ist auch streng monoton wachsend, denn

aus $x_1 < x_2$ folgt $x_1 + 1 < x_2 + 1$

- $f_2(2) = 3$
- wir zeigen, dass $f(x)$ streng monoton wachsend ist:

~ sei $x_1 < x_2$, dann gibt es 3 Fälle

~ Fall 1: $x_1 < x_2 \leq 2$

$$\Rightarrow f(x_1) = f_1(x_1) < f_1(x_2) = f(x_2) \quad \text{also } f(x_1) < f(x_2)$$

~ Fall 2: $x_1 \leq 2 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) = f_1(x_1) \leq f_1(2) = 3 = f_2(2) < f_2(x_2) = f(x_2)$$

also $f(x_1) < f(x_2)$

~ Fall 3: $2 < x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) = f_2(x_1) < f_2(x_2) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\blacksquare$

- da f streng monoton wachsend ist, ist f injektiv
- Bestimmung des Wertebereiches: $W = f(\mathbb{R})$

$$f((-\infty, 2]) = f_1((-\infty, 2]) = (-\infty, f_1(2)] = (-\infty, 3]$$

$$f((2, \infty)) = f_2((2, \infty)) = (f_2(2), \infty) = (3, \infty)$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (-\infty, 3] \cup (3, \infty) = \mathbb{R}$$

damit ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv

- da f injektiv + surjektiv ist, ist f bijektiv $\blacksquare$

Be. 7

-5- Bestimmung der Umkehrabbildung f^{-1} :

1. Teil : $f : \underbrace{(-\infty, 2]}_{\ni x} \longrightarrow \underbrace{(-\infty, 3]}_{\ni y = f(x)}$

sei $y \in (-\infty, 3]$ und $\underbrace{y = f(x) = f_1(x) = 2x - 1}$
$x \in (-\infty, 2]$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}(y+1) = x$$

also: $x = \boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+1) \quad \forall\, y \in (-\infty, 3]}$

2. Teil : $f : (2, \infty) \rightarrow (3, \infty)$

sei $y \in (3, \infty)$ und $\underbrace{y = f(x) = f_2(x) = x + 1}$
$x \in (2, \infty)$

$$\Longleftrightarrow \quad x = y - 1$$

also: $x = \boxed{f^{-1}(y) = y - 1 \quad \forall\, y \in (3, \infty)}$

Zusammenfassung :

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\boxed{f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y+1) & , y \leq 3 \\ y - 1 & , y > 3 \end{cases}}$