Musterlösungen Blatt 6

1) Folge (a_n) erfüllt mit $q \in [0,1)$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q\,|a_n - a_{n-1}| \quad \forall n \geq 2 \qquad (1)$$

<u>z.z.</u>: (a_n) ist Cauchy-Folge

<u>Bew.</u>: wir zeigen zuerst mittels Induktion, dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^{n-1}\,|a_2 - a_1| \qquad (2)$$

- <u>Ind.anfang</u>: $n = 1$:

$$(2) \Leftrightarrow |a_2 - a_1| \leq \underbrace{q^0}_{=1}\,|a_2 - a_1| \quad \text{wahre Aussage}$$

- <u>Ind'schritt</u>: $n \to n+1$:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \overset{(1)}{\leq} q\,|a_{n+1} - a_n| \overset{\text{Ind.vor.}}{\leq} q \cdot \{q^{n-1}|a_2 - a_1|\}$$

$$= q^{(n+1)-1}\,|a_2 - a_1| \quad \square \qquad | \text{ 2P.}$$

- sei $l \geq 1$, dann gilt

$$\sum_{k=n}^{n+l-1}(a_{k+1} - a_k) = \underbrace{\sum_{k=n}^{n+l-1} a_{k+1}} - \underbrace{\sum_{k=n}^{n+l-1} a_k}$$

$$= \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j - \sum_{j=n}^{n+l-1} a_j$$

$$= \underline{\underline{a_{n+l} - a_n}} \qquad (3) \qquad | \text{ 1P.}$$

- aus (3) folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+l} - a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n+l-1}(a_{k+1} - a_k)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+l-1}|a_{k+1} - a_k|$$

$$\overset{(2)}{\leq} \sum_{k=n}^{n+l-1} q^{k-1}\,|a_2 - a_1| = q^{n-1}(1 + q + \ldots + q^l)\,|a_2 - a_1|$$

$$\Rightarrow |a_{n+l} - a_n| \le q^{n-1} \frac{\overbrace{1-q^{l+1}}^{\le 1}}{1-q} |a_2 - a_1|$$

$$\le \underbrace{\frac{q^{n-1}}{1-q} |a_2 - a_1| \overset{!}{<} \varepsilon}_{\text{Ungl. (U)}}$$

Vor: $a_2 \neq a_1$ *)

$$(U) \Leftrightarrow q^{n-1} < \frac{\varepsilon}{|a_2 - a_1|}(1-q) \quad | \ln(\dots)$$

1.Weg: $(U) \Leftrightarrow (n-1) \underbrace{\ln q}_{<0} < \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|a_2-a_1|}$

$$\Leftrightarrow n > 1 + \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{|a_2-a_1|}}{\ln q} =: n_0(\varepsilon)$$

2.Weg da: $\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$, gibt es

zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon(1-q)}{|a_2-a_1|}$ ein $\tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon})$, so dass

$$q^{n-1} < \underbrace{\frac{\varepsilon}{|a_2-a_1|}(1-q)}_{=\tilde{\varepsilon}} \quad \forall n > \tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon}) =: n_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow (U)$

- $\overset{(U)}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon)$:

$$|a_{\underbrace{n+l}_{m}} - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m = n+l > n_0(\varepsilon)$$

- damit ist (a_n) eine Cauchy-Folge ∎

1P.

*) der Fall $a_2 = a_1$ ist trivial

2a) <u>Vor</u>: $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$

<u>z.z</u>: $\overline{z_n} \to \overline{z}$ und $|z_n| \to |z|$ für $n \to \infty$

<u>Bew</u>: I) $z_n \to z$, $n \to \infty$ $\Longleftrightarrow$ $x_n = \operatorname{Re}(z_n) \to x = \operatorname{Re}(z)$

$y_n = \operatorname{Im}(z_n) \to y = \operatorname{Im}(z)$

• nach Grenzwertsatz gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \lim_{n\to\infty} (x_n - i y_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n - i \lim_{n\to\infty} y_n = x - iy = \overline{z}$$

II) wir zeigen zunächst

$$\big|\, |z_n| - |z| \,\big| \leq |z_n - z| \qquad (1)$$

<u>1. Fall</u> $|z_n| \geq |z|$

(1) $\Longleftrightarrow$ $|z_n| - |z| \leq |z_n - z|$

$\Longleftrightarrow$ $|z_n| \leq |z_n - z| + |z|$ wahre Aussage wegen Δ-Ungleichung

<u>2. Fall</u> $|z_n| < |z|$

(1) $\Longleftrightarrow$ $|z| - |z_n| \leq |z_n - z| = |z - z_n|$

$\Longleftrightarrow$ $|z| \leq |z - z_n| + |z_n|$ wahr wegen Δ-Ungl.

Damit ist (1) bewiesen

• wegen $z_n \to z$, $n \to \infty$ gilt

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): \big|\, |z_n| - |z| \,\big| < |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

damit gilt also : $|z_n| \to |z|$ für $n\to\infty$ //

<u>2.Weg</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2+y_n^2} \overset{A4/Bl.6}{=} \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2)} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

2b) <u>Untersuchung auf Konvergenz bzw. Divergenz</u>

I) $z_n := \frac{1}{(1+i)^n}$

- es gilt $|z_n| = \frac{1}{|1+i|^n} = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=:q}\Bigg)^n$

da $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$, ist $|z_n| = q^n$ <u>Nullfolge</u>

- da $|z_n - 0| = |z_n| = \big||z_n| - 0\big| < \varepsilon$
$\forall n > n_0(\varepsilon)$
(denn $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$)

gilt also

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : |z_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \implies (z_n)$ ist <u>konvergent</u>

II) $w_n = \frac{1}{i^n}$

<u>1.Teilfolge</u> $w_{4k} = \frac{1}{(i^4)^k} = \frac{1}{(\underbrace{i^2}_{-1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1})^k} = \frac{1}{1^k} = \underline{\underline{1}}$

<u>2.Teilfolge</u> $w_{4k+1} = \frac{1}{i^{4k} \cdot i} = \underline{\underline{\frac{1}{i}}}$

- angenommen, dass (w_n) konvergent ist, dann müßten alle Teilfolgen denselben Grenzwert haben $\to$ Widerspruch

$\implies (w_n)$ ist <u>divergent</u>

3a) $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}}_{k=j+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}}_{k=j} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right\}$$

- da $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge ist, folgt

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{2}$$

3b) Untersuchung auf Konvergenz $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \frac{k+1}{k^2}}_{=: b_k}$

- $b_k = (-1)^k a_k$ mit $a_k = \frac{k+1}{k^2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist alternierende Reihe

- $a_k = \frac{k}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \underbrace{\frac{1}{k}} + \underbrace{\frac{1}{k^2}}$

beide monoton fallende Nullfolgen

$\Rightarrow (a_k)$ ist monoton fallende Nullfolge

$\xRightarrow{\text{Leibniz-Krit.}} \sum_{k=1}^{n} b_k$ ist konvergent