# Musterlösungen Blatt 5

1a) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{7n^2+1} = \frac{(-1)^n}{7 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{7}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\frac{1}{7}$

- wäre die Folge $(a_n)$ konvergent, so müßten alle Teilfolgen denselben Grenzwert haben

$\Rightarrow$ $(a_n)$ <u>ist divergent</u>

1b) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\to 0} \longrightarrow 0$ für $n\to\infty$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, da Nenner für $n\to\infty$ gegen "$\infty$" strebt

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) z.z. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

**a)** z.z. $\boxed{0 \leq \sqrt[2n]{n} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$ (1)

- $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar $\sqrt[2n]{n} > 1$

  $\Rightarrow \boxed{\sqrt[2n]{n} - 1 > 0}$ (2)

- Bernoulli'sche Ungl. $\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$ $\left.\begin{matrix} \forall x \geq -1 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\}$ (3)

setze $x = \sqrt[2n]{n} - 1$, nach (2) gilt $x > 0$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \left(\sqrt[2n]{n}\right)^n \geq 1 + n\left(\sqrt[2n]{n} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 1 + n\left(\sqrt[2n]{n} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n} - 1}{n} \geq \sqrt[2n]{n} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[2n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ (1) ist erfüllt ☒

**b)** z.z. (mittel ε-N-Def): $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} = 1}$ (4)

$$\left|\sqrt[2n]{n} - 1\right| \overset{(2)}{=} \sqrt[2n]{n} - 1 \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} \varepsilon}_{(4)}$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} =: n_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N > n_0(\varepsilon): \left|\sqrt[2n]{n} - 1\right| < \varepsilon \;\; \forall n > N \Rightarrow (4)$ ☒

**2c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$ (nach Grenzwertsatz und 2b)

$= 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$ ◻

(3) $a_1 := \sqrt{2}$, $\boxed{a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \geq 1}$ (1)

- $\underline{\text{z.z.}}$: $(a_n)$ monoton wachsend u. nach oben beschränkt

$(a_n)$ mon. wachsend

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2+a_n} \geq a_n$ (2)

- wir zeigen (um (2) quadrieren zu können) dass:

$\boxed{a_n \geq \sqrt{2} \ \forall n}$ (3)

<u>Bew.</u> (Induktion)

$n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$ ✓

$n \to n+1$: $a_{n+1} = \sqrt{2 + \underbrace{a_n}_{\geq 0 \text{ nach Ind.vor.}}} \geq \sqrt{2} > 0$ ◻

- mit (3) folgt

(2) $\Leftrightarrow \quad 2 + a_n \geq a_n^2 \quad \Big| -a_n + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (4)

- wegen (3) ist $|a_n - \frac{1}{2}| = a_n - \frac{1}{2}$

- damit ist

$$(4) \iff a_n - \frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\iff \boxed{a_n \le 2} \qquad (5)$$

- Bew von (5) mittels vollst. Induktion

~ $a_1 = \sqrt{2} < 2$ ✓

~ I.Vor.: $a_n \le 2$

~ I.S. $n \to n+1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{\underbrace{a_n}_{\le 2} + 2} \le \sqrt{4} = 2 \qquad \blacksquare$$

- aus (5) folgt: $(a_n)$ ist nach oben durch "2" beschränkt

- außerdem zeigt die Herleitung, dass

(2) $\iff$ (5) = wahre Aussage

$\Rightarrow (a_n)$ ist mon. wachsend $\blacksquare$

- da $(a_n)$ mon. wachsend u. nach oben beschränkt ist, ist sie (nach Vorlesung) auch konvergent, d.h. der Grenzwert $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert

- aus (1) folgt durch Quadrieren

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \qquad (6)$$

- da $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, folgt aus (6) mittels

Grenzwertsatz: $g^2 = 2 + g$

$\iff g^2 - g - 2 = 0$, $g_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$ $\quad \boxed{g_1 = 2}$

$g_2 = -1$

- wegen (3), also $a_n \geq \sqrt{2} \quad \forall n$

  muß gelten $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \geq \sqrt{2}$

- demzufolge scheidet der Fall $g_2 = -1$ aus

  u. wir haben bewiesen, dass

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 2}$$