Musterlösungen Blatt 3

1a) $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x+y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Beweis: • $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}: \boxed{x = \frac{m}{n}}$ (1)

• Annahme: $x+y \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}: \boxed{x+y = \frac{k}{\ell}}$ (2)

• (1),(2) $\implies$ $y = (x+y) - x = \frac{k}{\ell} - \frac{m}{n}$

$$= \frac{k \cdot n - m \cdot \ell}{\ell \cdot n}$$

offenbar gilt: $k \cdot n - m \cdot \ell \in \mathbb{Z}$ und $\ell \cdot n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow y \in \mathbb{Q}$ Wdspr. zu $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ Behauptung wahr ∎

1b) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies x \cdot y \in \mathbb{Q}$

• Gegenbeispiel: $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$y = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

und $x \cdot y = \sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ∎

2) Seien $x, y \geq 0$.

z.z.: $\boxed{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}}$ (1)

1. Fall: $x \geq y$

$\Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{y} \Rightarrow$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y} \quad | \ (\ldots)^2$$

$$\Leftrightarrow x \leq x-y + 2\sqrt{(x-y)y} + y \quad | -x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{(x-y)y}$$

w.A., da $\sqrt{\ldots}$ stets ≥ 0 ∎

2. Fall: $x \leq y$

- nach Fall 1 ist bewiesen:

  $\forall\ a \geq b \geq 0$ gilt: $\boxed{|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}}$ (2)

- setze $a = y$, $b = x$
- dann ist wegen $x \leq y$, $a \geq b \geq 0$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{|\sqrt{y} - \sqrt{x}|}_{= |\sqrt{x} - \sqrt{y}|} \leq \sqrt{\underbrace{|y-x|}_{= |x-y|}} \quad \left(\text{denn } |z| = |-z| \ \forall z \in \mathbb{R}\right)$$

- damit ist (1) bewiesen

3a) <u>Vor</u>: $M, N \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt

<u>z.z</u>: • $-M := \{-x \mid x \in M\}$ ist nach oben beschränkt

• $\boxed{\sup(-M) = -\inf M}$ (1)

<u>Bew</u>: • da M nach unten beschränkt,

$\exists\, S_u : \quad S_u \leq x \quad \forall x \in M$

• insbesondere existiert $\inf M$ als größte untere Schranke mit

$$\inf M \leq x \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow \quad -\inf M \geq \underbrace{-x}_{= y \in -M} \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow \quad y \leq -\inf M \quad \forall y \in -M$$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_o := -\inf M}$ ist obere Schranke von $-M$

$\Rightarrow$ $-M$ ist nach oben beschränkt

• <u>Annahme</u>: $\exists$ kleinere obere Schranke $S < S_o$ von $-M$

d.h. $\quad y \leq S \quad \forall y \in -M$

d.h. $\quad -x \leq S \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow \quad x \geq -S \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow$ $-S > -S_o = \inf M$, d.h. $-S$ eine größere untere Schranke von M als $\inf M$

Wdspr. $\blacktriangledown$

$\Rightarrow$ Ann. falsch

$\Rightarrow$ $S_0 = -\inf M$ ist die kleinste obere Schranke von $-M$

d.h. $S_0 = -\inf M = \sup(-M)$ ◻

3b) z.z.: $\boxed{M \subset N \Rightarrow \inf N \leq \inf M}$

Bew.:

- nach Def. von "$\inf N$" gilt: $\boxed{\inf N \leq x \quad \forall x \in N}$ (2)
- sei $x \in M$ beliebig $\overset{M \subset N}{\Longrightarrow} x \in N$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\inf N \leq x \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow$ $S = \inf N$ ist untere Schranke von M

$\Rightarrow$ (da $\inf M$ die größte untere Schranke von M)

$\inf M \geq \inf N$ ◻