Musterlösungen Blatt 2

Blatt 2

-1-

1a) z.z.: $P_n := \prod_{k=0}^{n} (1+a^{2^k}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $n=0^{*)}$: $P_0 = (1+a^{2^0}) \overset{?}{=} \frac{1-a^{2^1}}{1-a}$

$\Leftrightarrow \quad 1+a \overset{?}{=} \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a}$ wahre Aussage

- $n \to n+1$:

$P_{n+1} = (1+a^{2^{n+1}}) \cdot P_n = (1+a^{2^{n+1}}) \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$

$= \frac{1^2-(a^{2^{n+1}})^2}{1-a} = \frac{1-a^{2^{(n+1)+1}}}{1-a}$ $\square$

1b) z.z.: $n < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

- $n=0^{*)}$: $0 \overset{?}{<} 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \overset{?}{<} 1$ wahre Aussage

- $n \to n+1$:

$n+1 \overset{\text{Ind.vor.}}{<} \underbrace{2^n + 1 \overset{?}{\leq} 2^{n+1}}$

$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{?}{\leq} 2^n(2-1)$

$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{?}{\leq} 2^n$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\square$

2) z.z.: $\boxed{(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq x \leq 1}$

- $n=1$: $(1-x)^1 \overset{?}{\leq} \frac{1}{1+x}$ $\quad | \cdot (1+x) > 0$ wegen Vor $0 \leq x$

$\Leftrightarrow \quad 1-x^2 \overset{?}{\leq} 1$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 \overset{?}{\leq} 0$ wahre Aussage

---

*) man könnte den Induktionsanfang auch für $n=1$ machen

Blatt 2

-2-

- $\underline{n \to n+1:}$

$$(1-x)^{n+1} = \underbrace{(1-x)}_{\geq 0 \text{ (Vor.)}}(1-x)^n \overset{\text{Ind.vor.}}{\leq} \underbrace{(1-x)\frac{1}{1+nx} \overset{?}{\leq} \frac{1}{1+(n+1)x}}_{\text{sei Ungleichung (1)}}$$

$$\text{(1)} \overset{\text{Nenner}>0}{\iff} (1-x)(1+(n+1)x) \overset{?}{\leq} 1+nx$$

$$\iff 1+nx-(n+1)x^2 \overset{?}{\leq} 1+nx$$

$$\iff -(n+1)x^2 \overset{?}{\leq} 0 \qquad \text{wahr } \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

3) z.z.: $M := \left\{ \frac{2|x|}{2+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ist beschränkt

Bew.: • 0 ist untere Schranke, denn

$$0 \leq \frac{2|x|}{2+|x|} \quad \text{(da Zähler} \geq 0\text{, Nenner} > 1\text{)}$$

• 2 ist obere Schranke, denn

$$\frac{2|x|}{2+|x|} < \frac{2|x|}{|x|} = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

für $x=0$ gilt auch $0 = \frac{2|x|}{2+|x|} < 2$

• Ann.: $\exists$ untere Schranke $S_u > 0$ von M

wegen $\frac{2|0|}{2+|0|} = 0 \in M$ gilt dann $S_u \leq 0$ Wdspr.

$\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ $\boxed{\inf M = 0}$

• Ann.: $\exists$ obere Schranke $S_o < 2$

wähle $x \geq 0$, so dass

$$\frac{2x}{2+x} = r \quad \text{wobei } S_o < r < 2,\ r \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ $2x = 2r + xr$

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{2r}{2-r}$ (hierfür gilt offenbar $x \geq 0$)

damit ist $r = \frac{2|x|}{2+|x|} \in M$ und somit $r \leq S_o$;

dies ist ein Widerspruch zur ~~Ann~~. Vor. $S_o < r$

$\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ $\boxed{\sup M = 2}$

- wegen $0 = \inf M \in M$, gilt $\boxed{0 = \min M}$
- wegen $2 = \sup M \notin M$ $\left(\text{denn } \frac{2|x|}{2+|x|} < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \atop \text{s. oben}\right)$

folgt: <u>M hat kein Maximum</u>