Musterlösungen Blatt 1

Blatt 1

Aufgabe 1

a)
z.zg.: Die Aussage $T_1 := [\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$ ist immer wahr.
Bew.:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	T_1
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

b)
z.zg.: Die Aussage $T_2 := [A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ ist immer wahr.
Bew.:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	T_2
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

□

2a) z.z: $(b \geq 0 \text{ und } a^2 \leq b^2) \Rightarrow a \leq b$

1. Fall $b = 0$: z.z: $a^2 \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$

Beweis indirekt: Annahme $a > 0 \quad | \cdot a > 0$

$\Rightarrow a^2 > 0 \cdot a = 0$

dies ist im Widerspruch zur Vor. $a^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ Ann. falsch. $\Rightarrow$ Beh. richtig ∎

2. Fall $b > 0$: Bew. indirekt: Ann. $a > b$

- $a > b \mid \cdot b > 0 \Longrightarrow \boxed{ab > b^2}$ (1)

- aus $b>0$ (Fall 2) und $a>b$ (Ann.) folgt nach Transitivität: $a>0$, also

$$a > b \;|\cdot a>0 \implies \boxed{a^2 > ab} \quad (2)$$

$$\overset{(1),(2)}{\implies} a^2 > ab > b^2 \implies a^2 > b^2$$

Wdspr. zur Vor. $a^2 \le b^2$

$\implies$ Ann. falsch $\implies$ Beh. richtig ☒

2b) z.z: $(a^2 \le b^2) \implies |a| \le |b|$

Bew: • sei $A := |a|$, $B := |b|$

- dann ist $B \ge 0$ und $A^2 = a^2 \le b^2 = B^2$
- wir wenden 2a) an für A, B anstelle von a, b u. erhalten

$$(B \ge 0 \text{ und } A^2 \le B^2) \implies A \le B$$

d.h. $|a| \le |b|$ ☒

- Gegenbeispiel, falls man $|\cdot|$ weglässt:

$a = 1$, $b = -2$: dann ist $a^2 = 1 \le 4 = b^2$

aber $1 \le -2$ ist falsch

3a) bestimme $L = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{|2x-1| < |x-1|}_{\text{Ungl. (U)}}\}$

Fall 1 — $x = \frac{1}{2}$ — Fall 2 — $x = 1$ — Fall 3 — $\mathbb{R}$

Fall 1: $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$(U) \iff -(2x-1) < -(x-1) \quad | +2x-1$$
$$\iff 0 < x$$
$$\Rightarrow L_1 = (0, \tfrac{1}{2})$$

Fall 2: $x \in [\frac{1}{2}, 1)$

$$(U) \iff 2x-1 < -(x-1) \quad | +x+1$$
$$\left.\begin{array}{l} \iff 3x < 2 \\ \iff x < \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow L_2 = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3})$$

Fall 3: $x \in [1, \infty)$

$$(U) \iff 2x-1 < x-1 \quad | -x+1$$
$$\iff x < 0 \Longrightarrow L_3 = \emptyset$$

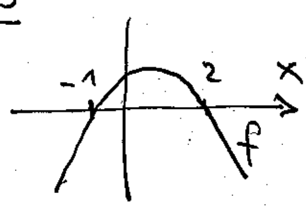
$$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \underline{\underline{(0, \tfrac{2}{3})}}$$

3b) bestimme $L = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{2 - x^2 \geq |x|}_{\text{Ungl. (U)}}\}$

1. Fall $x < 0$

- $(U) \iff f(x) = -x^2 + x + 2 \geq 0$
- f ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2}$

$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$



Be. 1
-5-

$$\Rightarrow L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0, \text{ und } x < 0\} = [-1,2] \cap (-\infty, 0) = \underline{\underline{[-1,0)}}$$

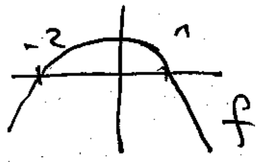
<u>2. Fall</u>: $x \geq 0$

$\bullet$ (U) $\Leftrightarrow$ $f(x) = -x^2 - x + 2 \geq 0$

f ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$



$$\Rightarrow L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \text{ und } x \geq 0\}$$

$$= [-2,1] \cap [0,\infty) = \underline{\underline{[0,1]}}$$

$$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{[-1,1]}}$$