Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 8.01.2003
Institut für Analysis und Numerik
Priv.-Doz. Dr. B. Rummler

Übungsblatt 11 zur Vorlesung **Mathematik III für ET** - WS02/03

1. Bilden Sie die klassische Ableitung $F'(x)$ (die Ableitung nach x !!) der Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch das (Parameter-)Integral
$$F(x) := \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\, dt$$
vorgegeben sei. Untersuchen Sie, ob die in $x = 0$ nicht erklärte Funktion $F'(x)$ in diesem Punkt stetig ergänzt werden kann!

2. Untersuchen Sie das Vektorfeld $\underline{v}$,
$\underline{v}(\underline{x}) := [3(x_1^2 - x_2^2) + 6x_1x_3, -6x_1x_2, 3(x_1^2 - x_3^2)]^T$, auf seine Zerlegbarkeit nach dem Helmholtzschen Zerlegungssatz. Überprüfen Sie dazu die Integrabilitätsbedingung und berechnen Sie bei deren Erfülltsein durch Kurvenintegrale 1. Art eine Potentialfunktion $g(\underline{x})$ mit $\underline{v}(\underline{x}) = grad(g(\underline{x})$.
Testen Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung von
$$\triangle\, g(\underline{x}) = div(grad(g(\underline{x}))) = ?$$
Prüfen Sie auch die Existenz eines Vektor-Potentials zu $\underline{v}$!!

3. Berechnen Sie das uneigentliche Integral im $\mathbb{E}^3$:
$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\underline{x})\, d\underline{x} = ?$$
Hierbei sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{\underline{0}\} \longrightarrow [0, \infty)$ definiert durch:
$$f(\underline{x}) := \begin{cases} \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right)^{\frac{5}{2}} & \underline{x} \neq \underline{0},\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \\ & \text{bei} \\ \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right)^{\frac{7}{2}} & \underline{x} \neq \underline{0},\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1 \end{cases}$$
Hinweis: Nutzen Sie geeignet gewählte Kugelkoordinaten!!

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $G : \mathbb{R}^3 \backslash \{\underline{0}\} \longrightarrow [0, \infty)$, welche durch:
$$G(\underline{x}) := \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3,\, \underline{x} \neq \underline{0}$$
definiert ist, in jedem Punkt $\underline{x}$ ihres Definitionsbereiches der Laplace-Gleichung:
$$\triangle\, G(\underline{x}) = div(grad(G(\underline{x}))) = 0$$
genügt.