Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Priv.-Doz. Dr. B. Rummler 26.11.2002

Übungsblatt 7 und Formeln zur Vorlesung **Mathematik III für ET** - WS02/03

1. Geben Sie im $\mathbb{E}^2$ der Integrationsbereich

$$B := \{\underline{x} = [x_1, x_2]^T \,|\, -2 \leq x_1 \leq 1\,,\; x_1 + 2 \leq x_2 \leq 4 - x_1^2\}$$

Die Dichtefunktion $\rho : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^1$ sei gegeben durch $\rho(\underline{x}) = 1 \;\forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^2$. Berechnen Sie

   (a) die Schwerpunktkoordinaten: $x_{1,S}$ und $x_{2,S}$ sowie

   (b) die Trägheitsmomente I_{x_1} und I_{x_2}!

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral 2.Art entlang der Verbindungsstrecke $\mathcal{C}$ der Punkte $P_1 \cong [0,0,0]^T$ und $P_2 \cong [3,2,1]^T$:

$$\int_{\mathcal{C}} x_1^3 dx_1 \,+\, 3x_3x_2^2 dx_2 \,-\, x_1^2 x_2 dx_3 \qquad = ?$$

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral 2.Art entlang des ebenen Kurvenstückes $\mathcal{C}$ mit $x_2 = x_1^3$ von $P_1 \cong [1,1]^T$ nach $P_2 \cong [2,8]^T$:

$$\int_{\mathcal{C}} 6x_1^2 x_2 dx_1 \,+\, 10 x_1 x_2^2 dx_2 \qquad = ?$$

4. Berechnen Sie mit der Dichtefunktion ρ: $\rho(\underline{x}) = 1 \;\forall\, \underline{x} \in \mathbb{E}^3$, den Schwerpunkt $P_S \cong [x_{1,S}, x_{2,S}, x_{3,S}]^T$ der Schraubenlinie:

$$x_1(t) := 3\cos t \quad x_2(t) := 3\sin t \quad x_3(t) := 2t \quad \text{bei } t \in [0, 2\pi]$$

Nächste Seite beachten !!!!

Standard-Definitionen zur Anwendung von Bereichs- , Kurven- und Oberflächenintergralen

Es sei $B \subset \mathbb{E}^3$ bzw. $B \subset \mathbb{E}^2$ eine abgeschlossene Jordan-messbare Teilmenge des 3- bzw. 2-dimensionalen Euklidichen Raumes. Auf dieser Menge B als Intergrationsbereich sei die nichtnegative Dichtefunktion $\rho : \mathbb{E}^k \longrightarrow \mathbb{E}^1$ ($k = 3$ bzw. $k = 2$) intergrierbar und es sei die MASSE des Bereiches B: $M_{|B|}$

$$M_{|B|} := \int_B \rho(\underline{x})\, dB > 0$$

Die Koordinaten des SCHWERPUNKTES des entsprechenden Körpers bzw. des entsprechenden ebenen Bereiches berechnet man durch die Formel:

$$x_{j,S} = \frac{1}{M_{|B|}}(\int_B x_j \rho(\underline{x})\, dB) \qquad \text{bei } j = 1, 2, (3)$$

Die TÄGHEITSMOMENTE bezüglich der x_j-Achsen berechnen sich bei ebenen Bereichen gemäß der Formel:

$$I_{x_j} = (\int_B x_i^2 \rho(\underline{x})\, dB) \qquad \text{bei } (j, i) = (1, 2),\ (2, 1)$$

und bei Bereichen im $\mathbb{E}^3$ nach:

$$I_{x_j} = (\int_B (x_i^2 + x_k^2) \rho(\underline{x})\, dB) \qquad \text{bei } (j, i, k) = (1, 2, 3),\ (2, 1, 3),\ (3, 1, 2)$$

Es sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^3$ bzw. $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2$ ein abgeschlossenes Jordan-messbares Kurvenstück des 3- bzw. 2-dimensionalen Euklidichen Raumes. Desweiteren gelte mit der obigen Dichtefunktion ρ: $\mathcal{C} \subset D(\rho)$ und ρ sei über $\mathcal{C}$ intergrierbar. Die MASSE des Kurvenstückes $\mathcal{C}$: $M_{|\mathcal{C}|}$ sei positiv:

$$M_{|\mathcal{C}|} := \int_{\mathcal{C}} \rho(\underline{x})\, ds > 0$$

Die SCHWERPUNKT-Koordinaten des mit ρ gewichteten Kurvenstücks $\mathcal{C}$ berechnet man durch die Formel:

$$x_{j,S} = \frac{1}{M_{|\mathcal{C}|}}(\int_{\mathcal{C}} x_j \rho(\underline{x})\, ds) \qquad \text{bei } j = 1, 2, (3)$$

Schließlich sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{E}^3$ ein abgeschlossenes Jordan-messbares Oberflächenstück des $\mathbb{E}^3$. Mit der obigen Dichtefunktion ρ gelte: $\mathcal{O} \subset D(\rho)$ und ρ sei über $\mathcal{O}$ intergrierbar. Die MASSE des Oberflächenstück $\mathcal{O}$: $M_{|\mathcal{O}|}$ sei positiv:

$$M_{|\mathcal{O}|} := \int_{\mathcal{O}} \rho(\underline{x})\, do > 0$$

Die SCHWERPUNKT-Koordinaten des mit ρ gewichteten Oberflächenstücks $\mathcal{O}$ berechnet man durch die Formel:

$$x_{j,S} = \frac{1}{M_{|\mathcal{O}|}}(\int_{\mathcal{O}} x_j \rho(\underline{x})\, do) \qquad \text{bei } j = 1, 2, 3$$