Randwertprobleme(RWP) für gewöhnliche DGL zweiter Ordnung 2014/15

PD Dr. B. Rummler, Zusatzmaterial zur VL Lineare Funktionalanalysis

Bezeichnungen: Gesuchte Funktion: $u(x)(v(x), w(x))$, rechte Seite $f(x)(g(x))$
Die folgende Problemstellung nennen wir ein Randwertproblem(RWP) der linearen gew. DGL zweiter Ordnung:

$$L[u] := a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = f(x) \quad (*)$$

$$R_1[u] := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \rho_1$$

$$R_2[u] := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \rho_2,$$

$$\text{mit}\, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_i \alpha_i^2 \,, \sum_i \beta_i^2 \neq 0$$

$$\text{und}\, D(f(x), a_i, i = 0,1,2) \supset [a,b] \neq \{a\}, \{b\}$$

Gilt $\rho_1 = \rho_2 = 0$, so nennen wir die Problemstellung **homogenes RWP der inhomogenen Gleichung**, gilt darüber hinaus: $f(x) = 0$, so sprechen wir das Problem als **vollhomogenes RWP** an.
Bemerkung 1: Anders als bei AWP muss ein RWP nicht immer lösbar sein, bzw. RWP kann unendlich viele Lösungen besitzen (Eigenwertprobleme).

Satz 1: $\{u_1(x), u_2(x)\}$ sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $(*)_h$. Das RWP ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\begin{vmatrix} R_1[u_1] & R_1[u_2] \\ R_2[u_1] & R_2[u_2] \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\circ)$$

gilt.
Bew: Sei u_s spezielle Lösung von $(*)$. Dann gilt:

$$u_{a(llgemein)} := u_s(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Die Anwendung der Randbedingungen liefert nun:

$$R_k[u_a] = R_k[u_s] + c_1 R_k[u_1] + c_2 R_k[u_2], \quad k = 1,2$$

$$\begin{pmatrix} R_1[u_1] & R_1[u_2] \\ R_2[u_1] & R_2[u_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 - R_1[u_s] \\ \rho_2 - R_2[u_s] \end{pmatrix},$$

was der eindeutigen Lösbarkeit bei $(\circ)$ entspricht.$\square$

Satz 2: Das RWP nach $(*)$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige vollhomogene RWP

$$L[u] = 0\,,\ R_1[u] = R_2[u] = 0 \quad (*)_{vh}$$

nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt.
Bew: (i) Das RWP nach $(*)$ sei eindeutig lösbar. Damit folgt $u_{s(vh)} \equiv 0$ ist spezielle Lösung von $(*)_{vh}$. Mit $(\circ)$ folgt aus $\rho_1 = \rho_2 = 0$: $c_1 = c_2 = 0.\Box$(i)

(ii)$(*)_{vh}$ habe nur die triviale Lösung. Seien v und w zwei Lösungen von $(*)$. Dann folgt:

$$L[v-w] = 0\,,\ R_1[v-w] = R_2[v-w] = 0$$

Damit ist $v - w$ Lösung von $(*)_{vh}$ und damit $v - w \equiv 0$. $\Box$(ii)

Eine besondere Rolle spielt das homogenes RWP der inhomogenen Gleichung $(*)$.
(Regel: Man erkauft sich homogene Randbedingungen durch neue rechte Seite!!)
Wir betrachten dazu:

$$L[u] = f(x),\ R_1[u] = R_2[u] = 0 \quad (\times)$$

Unter der Voraussetzung, dass $(\times)$ eindeutig lösbar sei $\forall\, f \in C[a,b]$, stellen wir mit einer geeigneten Funktion $v \in C^2[a,b]$ zunächst die Randbedingungen ein (eine solche Funktion v kann man immer finden).
Für v gilt dann

$$L[v] = g(x),\ R_1[v] = \rho_1,\ R_2[u] = \rho_2$$

Nach Voraussetzung existiert nun die eindeutige Lösung w des RWP vom Typ $(\times)$

$$L[w] = f(x) - g(x),\ R_1[u] = R_2[u] = 0$$

Damit gilt für $u =: v + w$:

$$L[u] = L[v+w] = f(x) - g(x) + g(x) = f(x),$$

$$R_1[u] = \rho_1,\ R_2[u] = \rho_2,$$

womit u also die Lösung von $(*)$ ist.

Bei $a_0(x) \neq 0 \forall\, x \in [a,b]$ können wir $(*)$ durch $a_0(x)$ dividieren, oder analog dazu $a_0(x) \equiv 1$ ansehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den obigen Betrachtungen entsprechend $(\times)$. Ist $a_1(x) \in C[a,b]$, so kann man nun durch Multiplikation der Gleichung

$$L[u] := u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = f(x)$$

mit $p(x) =: \exp(\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx)$ die folgende vorteilhafte Formulierung des Randwertproblems erhalten:

$$L_1[u] := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = p(x)f(x) =: f_1(x), \quad (\bullet)$$
$$\text{mit } q(x) := p(x)a_2(x) \text{ und} \qquad R_1[u] = R_2[u] = 0 \quad (\bullet\bullet)$$

Nun sei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein Fundamentalsystem von $(\bullet)_h$ mit

$$\begin{vmatrix} R_1[u_1] & R_1[u_2] \\ R_2[u_1] & R_2[u_2] \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Wir überführen das Fundamentalsystem $\{u_1(x), u_2(x)\}$ vermittels der regulären Transformation

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} R_1[u_2] & -R_1[u_1] \\ R_2[u_2] & -R_2[u_1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$$

in das Fundamentalsystem $\{v_1(x), v_2(x)\}$ mit

$$R_1[v_1] = R_2[v_2] = 0$$

und der Wronski-Determinante

$$W(x) := v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)\ .$$

Nach dem bekannten Satz über die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems 1.Ordnung, bzw. über die Wronski-Determinante, erhalten wir für $W(x)$ die gew. DGL:

$$W'(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}W(x)$$

und damit bei Integration ab $x_0 = a$:

$$W(x)p(x) = W(a)p(a) = const. \quad (\otimes)$$

Wir ermitteln nun vermittels der Methode der Variation der Konstanten eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(\bullet)$, wobei $\underline{\underline{W}}(.)$ die Wronski-Matrix bezeichne:

$$u_s(x) = (v_1(x), v_2(x)) \int_{x_0}^{x} \underline{\underline{W}}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f_1(t)}{p(t)} \end{pmatrix} dt$$

Schreiben wir nun die inverse Wronski-Matrix in der Gestalt:

$$\underline{\underline{W}}^{-1}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} v_2'(t) & -v_2(t) \\ -v_1'(t) & v_1(t) \end{pmatrix} \quad ,$$

so erhalten wir bei $x_0 = a$ die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $(\bullet)$ in der Form

$$u_s(x) = (v_1(x), v_2(x)) \int_a^x \frac{1}{W(t)p(t)} \begin{pmatrix} -v_2(t)f_1(t) \\ v_1(t)f_1(t) \end{pmatrix} dt =$$
$$= \int_a^x \frac{(-v_1(x)v_2(t) + v_2(x)v_1(t))f_1(t)}{W(a)p(a)} dt\,,$$

wobei die Beziehung $(\otimes)$ benutzt wurde.

Aus der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung $(\bullet)$

$$u_a(x) = u_s(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$$

erhalten wir die Lösung des RWP $(\bullet), (\bullet\bullet)$, indem wir c_1 und c_2 aus den Randbedingungen $(\bullet\bullet)$ bestimmen, wobei wir $u_s(a) = R_1[u_s] = 0$ beachten:

$$R_1[u_s(x) + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)] = u_s(a) + c_1 v_1(a) + c_2 v_2(a) =$$

$$= c_2 R_1[v_2] = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$$

$$R_2[u_s(x) + c_1 v_1(x)] = u_s(b) + c_1 v_1(b) =$$

$$= -R_2[v_1] \int_a^b \frac{v_2(t) f_1(t)}{W(a)p(a)} dt + c_1 R_2[v_1] = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \int_a^b \frac{v_2(t) f_1(t)}{W(a)p(a)} dt$$

Mit den nun bestimmten Konstanten c_1 und c_2 erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung des RWP $(\bullet), (\bullet\bullet)$:

$$u(x) = u_s(x) + c_1 v_1(x) =$$

$$= \int_a^x \frac{(-v_1(x)v_2(t) + v_2(x)v_1(t)) f_1(t)}{W(a)p(a)} dt + \int_a^b \frac{v_2(t) f_1(t)}{W(a)p(a)} dt v_1(x) =$$

$$= \int_a^x \frac{v_2(x)v_1(t)}{W(a)p(a)} f_1(t) dt + \int_x^b \frac{v_1(x)v_2(t)}{W(a)p(a)} f_1(t) dt = \int_a^b G(x,t) f_1(t) dt \,,$$

wobei $G(x,t)$ die sogenannte **Greensche Funktion** (George Green 1793-1841) des RWP $(\bullet), (\bullet\bullet)$ ist, die definiert ist durch:

$$G(x,t) := \frac{1}{W(a)p(a)} \begin{cases} v_2(x)v_1(t) & t \le x \\ v_1(x)v_2(t) & t \ge x \end{cases}$$

Bemerkung 2: Die Greensche Funktion $G(x,t)$ ist gemäß ihrer Definition stetig in $[a,b] \times [a,b]$. Sie genügt für $t \neq x$ der homogenen DGL $(\bullet)_h$:

$$L_1[G(x,t)] := (p(x) G_x(x,t))' + q(x) G(x,t) = 0, \qquad \text{, denn}$$

$$p(x) G_{xx}(x,t) + p'(x) G_x(x,t)) + q(x) G(x,t) =$$

$$= \frac{v_j(t)}{W(a)p(a)} (p(x) v_i''(x) + p'(x) v_i'(x) + q(x) v_i(x)) = 0 \quad (i,j) = (1,2), (2,1).$$

Außerdem genügt die Greensche Funktion $G(x,t)$ den homogenen Randbedingungen $(\bullet\bullet)$:

$$R_1[G(x,t)] \,=\, G(a,t) \,=\, 0, \quad R_2[G(x,t)] \,=\, G(b,t) \,=\, 0$$

Somit ist $G(x,t)$ für $t \neq x$ Lösung eines vollhomogenen Problems.

Bemerkung 3: Die Greensche Funktion $G(x,t)$ liefert in der ersten Ableitung nach der ersten Variablen x die folgende, sogenannte **Sprungrelation**:

$$G_x(x,x-0) \,-\, G_x(x,x+0) \,=\, \frac{1}{W(a)p(a)}(v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)) \,=$$

$$= \frac{W(x)}{W(a)p(a)} \,=\, \frac{1}{p(x)} \qquad (\otimes\otimes)$$

Satz 3: Das RWP nach $(\bullet), (\bullet\bullet)$ sei gegeben und das zugehörige vollhomogene RWP $(\bullet)_h, (\bullet\bullet)$ gestatte nur die triviale Lösung. Dann ist

$$u(x) \,=\, \int_a^b G(x,t)f_1(t)dt$$

die eindeutige Lösung des RWPs $(\bullet), (\bullet\bullet)$.
Bew: Zunächst berechnen wir die Ableitungen $u'(x)$ und $u''(x)$ (als Ableitung von Parameterintegralen):

$$u'(x) \,=\, G(x,x)f_1(x) \,+\, \int_a^x G_x(x,t)f_1(t)dt \,+\, \int_x^b G_x(x,t)f_1(t)dt \,-\, G(x,x)f_1(x) \,=$$

$$= \int_a^b G_x(x,t)f_1(t)dt$$

$$u''(x) \,=\, G_x(x,x-0)f_1(x) \,+\, \int_a^x G_{xx}(x,t)f_1(t)dt \,-\, G_x(x,x+0)f_1(x) +$$

$$+ \int_x^b G_{xx}(x,t)f_1(t)dt \qquad = \frac{1}{p(x)} \,+\, \int_a^b G_{xx}(x,t)f_1(t)dt$$

Bei der letzten Identität wurde die Sprungrelation $(\otimes\otimes)$ verwandt. Das Einsetzen der berechneten Ableitungen in die Gleichung $(\bullet)$ liefert nun unter Beachtung der Eigenschaft der Greenschen Funktion, Lösung von $(\bullet)_h$ zu sein:

$$L_1[u] \,:=\, f_1(x) \,+\, \int_a^b ((p(x)G_x(x,t))' \,+\, q(x)G(x,t))f_1(t)dt \,=\, f_1(x),$$

Damit ist $u(x)$ Lösung von $(\bullet)$. Das Erfülltsein der Randbedingungen $(\bullet\bullet)$ folgt sofort aus der Definition von $G(.,.)$. Nach Satz 2 ist schließlich $u(x)$ als Lösung von $(\bullet), (\bullet\bullet)$ eindeutig. $\square$