Übungsaufgaben: Nichlineare Funktionalanalysis
Serie 5

PD Dr. B. Rummler

Sommersemester 2020

1) (*Prinzip des ausgelassenen Stahles*)
Zeigen Sie die
Folgerung 2.27:
$\mathbb{X}$ sei reeller (bzw. komplexer) Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{X}$ offene beschränkte Menge ("'$\Omega \neq \emptyset$"'). $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{X}$ sei vollstetigen Abbildung.
Das Prinzip des ausgelassenen Stahles nach Theorem 2.9 wird gemäß ($\circ$) befriedigt, wenn eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllt ist. Insbesondere hat F dann wieder einen Fixpunkt in $\overline{\Omega}$.

(Thm: *i*) (Rothe-Bedingung) Die Menge Ω konvex ist, bei $F(\partial\Omega) \subset \overline{\Omega}$.

(Thm: *ii*) (Prinzip des spitzen Winkels)
$\mathbb{X} = \mathbb{H}$ sei Hilbert-Raum , $o_{\mathbb{H}} \in \Omega$ und
$\mathrm{Re}(x - F(x), x)_{\mathbb{H}} \geq 0 \ \forall x \in \partial\Omega$.

(Thm:*iii*) (Leray-Schauder Prinzip) $o_{\mathbb{X}} \in \Omega$ und $t \cdot F(x) \neq x \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,1)$.

(Thm: *iv*) (Altmann Bedingung)
$\exists\, x_o \in \Omega$ so, dass $\|F(x) - x\|_{\mathbb{X}}^2 \geq \|F(x) - x_o\|_{\mathbb{X}}^2 - \|x - x_o\|_{\mathbb{X}}^2 \ \forall x \in \partial\Omega$.

2) *(Dualitätsabbildung)*
Es seien $\mathbb{X}$ ein reeller, separabler, unendlich-dimensionalerund reflexiver Banachraum und $\mathbb{X}^*$ sein Dualraum. Der Raum $\mathbb{X}^*$ sei streng konvex, d.h:

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{X}^* \quad \text{mit} \quad x \neq y \,\text{und} \quad ||x||_{\mathbb{X}^*}\,, ||y||_{\mathbb{X}^*} \leq 1 \quad \text{gilt} \quad ||x+y||_{\mathbb{X}^*} < 2\,.$$

Die auf ganz $\mathbb{X}$ erklärte Abbildung A: $\mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$ mit

$$\langle x, Ax\rangle_{\mathbb{X},\mathbb{X}^*} := ||x||_{\mathbb{X}}^2 = ||Ax||_{\mathbb{X}^*}^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{X}\,,$$

heißt Dualitätsabbildung.
Zeigen Sie:
Die Dualitätsabbildung A: $\mathbb{X} \to \mathbb{X}^*$ (mit $\mathbb{X}^*$ streng konvex) ist wohldefiniert und demistetig.
(Eine Abbildung A: $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ (hier bei $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^*$) heißt demistetig, wenn aus

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{\mathbb{X}} x \quad \text{immer folgt, dass } \{Ax_k\}_{k=1}^{\infty} \xrightarrow{\mathbb{Y}} Ax \quad .)$$