Übungsaufgaben: Nichtlineare Funktionalanalysis
Serie 4

PD Dr. B. Rummler

Sommersemester 2020

1) Es seien $\underline{F} \in (\mathbb{C}^2(\overline{\Omega}))^n$, $\underline{x} \in \Omega$ und $\underline{F}'(\underline{x})$ die Jocobi-(Ableitungs-)Matrix

$$\underline{F}'(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}}_{\underline{x}=\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}} .$$

$\underline{\underline{A}}$ sei die Adjunktenmatrix der obigen Jocobi-(Ableitungs-)Matrix.
Zeigen Sie: Die Spalten der Adjunktenmatrix $\underline{\underline{A}}$ sind divergenzfrei.

2) Es sei $\mathbb{X}$ ein separabler unendlich-dimensionaler Banachraum, $F : M \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ eine vollstetige sowie Fréchet-differenzierbare Abbildung bei $x_o \in U(x_o) \subset M \neq \emptyset$
Das Frechet-Differential $dF(x_o, x - x_o)$ werde wie in Serie 2 Aufgabe 1 aufgefasst im Sinne von $F(x) = F(x_o) + dF(x_o, x - x_o) + R(x) = F(x_o) + F'(x_o)(x - x_o) + R(x)$ mit der Abkürzung $T := F'(x_o) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ als linarem vollstetiger Operator.
F habe in x_o einen Fixpunkt und $I_{\mathbb{X}} - T$ sei injektix. Zeigen Sie , dass der Fixpunkt x_o ein isolierter Fixpunkt von F ist und zudem

$$\mathring{i}(F, x_o) = \mathring{i}(T, o_{\mathbb{X}})$$

gilt.

3) *(Lipschitz-Strörung)*
Es sei $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ mit $F \in V(\Omega, \mathbb{X})$ und $\mathring{i}(F, \Omega) \neq 0$.
Desweiteren sei $G : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ Lipschitz-stetig mit fixem $L > 0$:

$$||G(x) - G(y)||_{\mathbb{X}} \leq L \cdot ||x - y||_{\mathbb{X}} \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{X}$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Zahl $\varepsilon_o > 0$ so, dass die Gleichung

$$x = F(x) + \varepsilon G(x)$$

$\forall \varepsilon : |\varepsilon| \leq \varepsilon_o$ eine Lösung $x \in \Omega$ besitzt.