Übungsaufgaben: Nichtlineare Funktionalanalysis
Serie 3

PD Dr. B. Rummler

Sommersemester 2020

1) Berechnen Sie möglichst elegant die Integrale:

   a)
$$(2\pi i)^{-1} \oint_{S(0,3)} \frac{1}{z-2} dz = ?$$

   b)
$$(2\pi i)^{-1} \oint_{S(0,3)} \frac{e^z}{e^z-1} dz = ?$$

   c)
$$(2\pi i)^{-1} \oint_{S(0,3)} \tan z \, dz = ?$$

2) *(Auflösungssatz)* Wir betrachten mit $\underline{F} : U(\underline{x}_o, \underline{y}_o) = D(\underline{F}) \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ das Gleichungssystem
$$\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}. \qquad (*)$$
Der Punkt: $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ sei Lösung dieses Gleichungssystems.
Formulieren Sie als Folgerung aus Theorem 1.6 die Bedingungen für die lokale Auflösbarkeit von $(*)$ nach $\underline{y}$ im Sinne von $\underline{y} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ bei $\underline{y}(\underline{x}_o) = \underline{y}_o$.

3) Zeigen Sie das nachfolgende lokale Invertierungs-Prinzip:
Vorgegeben sei die C^1-Abbildung $F : U(x_o) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, wobei $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume über dem Körper $\mathbb{K}$ seien. F ist genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn die Frechetableitung $F'(x_o)$ bijektiv ist. (Unter einem (lokalen) C^1-Diffeomorphismus versteht man im obigen Sinne eine bijektive Abbildung $F : U(x_o) \to F(U(x_o))$ mit den C^1-Abbildungen F und F^{-1}.)

4) (*Schauder Operatoren*)
Es seien $\mathbb{H}$ ein reeller separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $M := \{x \in \mathbb{H} : ||x|| \leq 1\} = \overline{K}(o_{\mathbb{H}}, 1)$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{H}$ ausgestattet mit der durch die Norm von $\mathbb{H}$ induzierten Metrik. Jedes $x \in \mathbb{H}$ habe die Fourier-Darstellung $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j w_j$.
Untersuchen Sie die unten erklärten Abbildungen T_1 , T_2 und T_3 hinsichtlich ihrer Stetigkeit und Vollstetigkeit. Geben Sie im Falle der Vollstetigkeit einer Abbildung die Schauder Operatoren P_8 an!

   (a) $T_1 : D(T_1) = M \to \mathbb{E}^1$ mit $T_1(x) := (\sqrt{1 - ||x||^2}) \qquad \forall\, x \in M$.
   (b) $T_2 : D(T_1) = M \to \mathbb{E}^1$ mit $T_2(x) := ||x||\mathrm{sgn}(a_1) \qquad \forall\, x \in M$.
   (c) $T_3 : D(T_1) = M \to \mathbb{H}$ mit
$$T_3(x) = T_3(\sum_{j=1}^{\infty} a_j w_j) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sgn}(a_j)}{j^2} \cdot a_j w_j \qquad \forall\, x \in M .$$