Übungsaufgaben: Nichtlineare Funktionalanalysis
Serie 2

PD Dr. B. Rummler

Sommersemester 2020

1) Es sei $\mathbb{X}$ ein separabler unendlich-dimensionaler Banachraum, $F : M \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ eine vollstetige sowie Fréchet-differenzierbare Abbildung bei $x_o \in U(x_o) \subset M \neq \emptyset$.
Zeigen Sie, dass das Fréchet-Differential $dF(x_o, x - x_o)$ aufgefasst im Sinne von
$F(x) = F(x_o) + dF(x_o, x - x_o) + R(x) = F(x_o) + F'(x_o)(x - x_o) + R(x)$
als "Linaer-Anteil" $T := F'(x_o) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ einen vollstetigen linaren Operator erklärt.

2) Zeigen Sie das *Gronwallsche Lemma*: Vorgegeben seien die Funktionen f und g mit $f,\, g \in \mathbb{C}[\tau, T]$ bei: $-\infty < \tau < T < \infty$. g sei auf $[\tau, T]$ monoton wachsend. Mit festem $\alpha : 0 < \alpha < \infty$ genügen die Funktionen f und g für alle $t \in [\tau, T]$ der Ungleichung
$$f(t) \leq g(t) + \alpha \int_\tau^t f(s)\, ds \; .$$
Dann gilt für alle $t \in [\tau, T]$ die Ungleichung:
$$f(t) \leq g(t) \cdot \exp(\, \alpha\, (t - \tau)) \; .$$

3) Im Sinne der Produktregel für Fréchet-Ableitungen aus der Vorlesung sei:
$$H(x) := B(F_1(x), F_2(x)) \quad , F_j : U(x_o) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}_j \, ; \, j = 1, 2$$
Die Abblidungen F_j seien aus $C^3(U(x_o), \mathbb{X}_j)$. Berechnen Sie $H''(x)$ und $H'''(x)$!

4) *(Fréchet Ableitung)* Vorgegeben seien der reelle Banachraum $\mathbb{X} := \mathbb{C}[0, 1]$ sowie die Abbildung (das Funktional) $F : D(F) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{E}^1$ erklärt durch:
$$F(x) := (\int_0^1 \sin(x(t))\, dt) \qquad \forall\, x \in D(F)$$
Bestimmen Sie $D(F)$ und überprüfen Sie die Fréchet-Differenzierbarkeit von F auf $D(F)$. Geben Sie gegebenenfall die Fréchet Ableitung von F an.