Übungsaufgaben: Nichtlineare Funktionalanalysis
Serie 1

PD Dr. B. Rummler

Sommersemester 2020

1) Es sei $\mathbb{H}$ ein separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges ONS in $\mathbb{H}$. $M := \{x \in \mathbb{H} : ||x|| \leq 1\} = \overline{K}(o_{\mathbb{H}}, 1)$ sei die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{H}$ und jedes $x \in \mathbb{H}$ habe die Fourier-Darstellung $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j w_j$.
   Zeigen Sie, dass durch $T : D(T) = M \to \mathbb{H}$
   $$T(x) := (\sqrt{1 - ||x||^2})w_1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-1} w_j \qquad \forall\, x \in M$$
   eine stetige Abbildung erklärt wird.

2) (*Peano*) Vorgegeben sei das Anfangswertproblem (AWP):
   $$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = g(t, x(t)) \quad , x(t_o) = x_o.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes den Satz von Peano:
   Es seien t_o, x_o und $a\,, b : 0 < a,\, b < \infty$ vorgegeben.
   Auf $Q := \{(t,x)^T \in \mathbb{E}^2 : |t - t_o| \leq a\,, |x - x_o| \leq b\}$ sei g stetig mit $|g(.,.)| \leq K$ beschränkt.
   Beh: Das AWP hat eine stetig differenzierbare Lösung in $[t_o - c, t_o + c]$ bei $c := min(a, \frac{b}{K})$.

3) Es sei $\mathbb{X}$ ein separabler unendlich-dimensionaler Banachraum, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle beschränkten Mengen $M \subset \mathbb{X}$ das Bild $F(M)$ präkompakt sei.
   Desweiteren existiere eine Zahl $R \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass bei fixem $\tau \in [0,1]$ für $x \in \mathbb{X}$ als Lösung der Gleichung $x - \tau F(x) = 0 : ||x||_{\mathbb{X}} \leq R$ gilt.
   Zeigen Sie: F hat einen Fixpunkt in $\mathbb{X}$!