Analysis 3 u. Funktionentheorie - Kompaktheit im metrischen Raum

PD Dr. B. Rummler

Topologie τ , topologischer Raum (M,τ)

Def: Es seien M eine nichtleere Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Wir nennen ein System von Teilmengen $\tau \subset \mathfrak{P}(M)$ eine Topologie auf M, wenn τ den folgenden Eigenschaften genügt:

(τ i) $\emptyset, M \in \tau$

(τ ii) I sei eine beliebige Indexmenge und $\forall\, \alpha \in I$ sei $\mathscr{O}_\alpha \in \tau$. dann gilt auch: $\bigcup_{\alpha\in I} \mathscr{O}_\alpha \in \tau$.

(τ iii) Für endlich viele $\mathscr{O}_{\alpha_j} \in \tau, j = 1,...,N$, gerhört auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^{N} \mathscr{O}_{\alpha_j}$ zu τ.

das Paar (M,τ) nennen wir einen topologischen Raum. Genügt τ zudem dem Trennungsaxiom:

(τ iv) $\forall x,y \in M$ mit $x \neq y$ existieren Elemente $\mathscr{O}_x \in \tau$ und $\mathscr{O}_y \in \tau$ so, dass $x \in \mathscr{O}_x$, $y \in \mathscr{O}_y$ bei $\mathscr{O}_x \cap \mathscr{O}_y = \emptyset$ gilt ;

so nennen wir (M,τ) einen Hausdorffschen topologischen Raum und τ Hausdorffsch.

Offene, abgeschlossene Mengen und Umgebungen im topologischer Raum (M,τ)

Def: Die Elemente von $\tau : \mathscr{O} \in \tau$ nennen wir offenen Mengen. Alle Mengen $A \in \mathfrak{P}(M)$ mit $A = \mathscr{O}^C$, $\mathscr{O} \in \tau$ nennen wir abgeschlossene Mengen. Sei $x \in M$ ein Punkt aus (M,τ), jede Menge $U \in \mathfrak{P}(M)$ mit $x \in U$, sowie $\exists \mathscr{O} \in \tau$ mit $x \in \mathscr{O} \subset U$ nennen wir eine Umgebung von x. Wir schreiben $U = U(x)$.

Der metrische Raum $(M,\rho(.))$

Def: Eine Abbildung $\rho : M \times M \to [0,\infty)$ nennen wir eine Metrik auf M, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $\rho(x,y) \geq 0; \quad \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ (POSITIVITÄT)

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x), \quad \forall\, x,y \in M$, (SYMMETRIE)

(iii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y), \forall x,y,z \in M.$ (DREIECKSUNGLEICHUNG)

das Paar $(M,\rho(.))$ nennen wir einen metrischen Raum.

Durch Metrik induzierter topologischer Raum $(M,\tau_{\rho(.)})$

Def: Für alle $x \in M$ und für alle $\varepsilon > 0$ erklären wir eine offene ε-Kugel um x durch: $K_\varepsilon^\rho(x) := \{y \in M | \rho(x,y) < \varepsilon\}$. Das System: $\beta := \{K_\varepsilon^\rho(x)\}_{x\in M,\varepsilon>0}$ ist ein System offener Mengen bestehend aus den offenen ε-Umgebungen aller Punkte x von M. Beginnt man mit dem System β und nimmt zu diesem System alle diejenigen Mengen dazu, welche durch die Operationen in (τ ii) und (τ iii) erzeugt werden, so ist das Ergebnis dieses Prozesses eine Hausdorffsche Topologie $\tau_{\rho(.)}$ auf M. Diese Topologie nennt man: die durch die Metrik ρ induzierter Topologie und $(M,\tau_{\rho(.)})$ den durch Metrik induzierter topologischer Raum.

Der normierte Raum $(V, \|.\|)$

Def: Gegeben sei ein linearer Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ und eine Abbildung $\|.\| : V \to [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(vni) $\|x\| \geq 0,\ \forall\, x \in V; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o_V$, (POSITIVE DEFINITHEIT)

(vnii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{K}$, (HOMOGENITÄT)

(vniii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (DREIECKSUNGLEICHUNG).

Dann nennen wir die Abbildung $\|.\|$ Norm auf V und das Paar $(V, \|.\|)$ einen normierten Raum.

BSP. A: Sei $V = \mathbb{R}$ mit der Norm $|x| =: \|x\|,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben für das Paar $(\mathbb{R}, |.|) =: \mathbb{E} = \mathbb{E}^1$ (Euklidischer Raum der Dimension 1).

BSP. B: Sei $V = \mathbb{C}$ mit der Norm $|z| =: \|z\|,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Wir schreiben für das Paar $(\mathbb{C}, |.|) =: \mathbb{E}_{\mathbb{C}} = \mathbb{E}^1_{\mathbb{C}}$ (komplexer Euklidischer Raum der Dimension 1).

Def: Der metrische Raum $(M, \rho(.))$ heißt vollständiger metrischer Raum, wenn jede Cauchy-Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (M, \rho(.))$ in $(M, \rho(.))$ konvergiert.

Def: (Heine-Borelsche-Überdeckungseigenschaft) Ein topologischer Raum (M, τ) heißt kompakter topologischer Raum, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_{\rho(.)}$ von M endlich viele Indizes $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in I$ gibt, so dass $M \subset \mathscr{O}_{\alpha_1} \cup \mathscr{O}_{\alpha_2} \cup \ldots \cup \mathscr{O}_{\alpha_k}$ gilt. Eine Teilmenge $K \subset M$ des topologischen Raumes (M, τ) nennen wir kompakte Menge in (M, τ), wenn der topologische Raum $(M, \tau \cap K)$ selbst kompakter topologischer Raum ist.

Def: (Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft) Ein metrischer Raum $(M, \rho(.))$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge von Punkten in $(M, \rho(.))$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Es ist naheliegend auch diese Definiton auf Teilmengen metrischer Räume auszudehnen:
Def: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $(M, \rho(.))$ heißt folgenkompakt, wenn sie als Teilraum $(K, \rho_{|K}(.))$ folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge in $(K, \rho_{|K}(.))$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.
Satz: (Äquivalenz von Heine-Borelsche-Überdeckungseigenschaft und Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft) Im metrischen Raum sind die Heine-Borelsche-Überdeckungseigenschaft mit $\tau = \tau_\rho$ und die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft äquivalent.

Bew: $(i:)(\Rightarrow)$ Wir zeigen zuerst, dass die Überdeckungskompaktheit von M die Folgenkompaktheit impliziert: Angenommen $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ sei eine Folge in M, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Insbesondere kann also kein $x \in M$ Häufungspunkt von $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ sein. Für jedes $x \in M$ existiert ein $\varepsilon_x > 0$ so dass $K^\rho_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele $x_l \in \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ enthält.
Da wir $M \subset \bigcup_{x \in M} K^\rho_{\varepsilon_x}(x)$ schreiben können genügen nach Voraussetzung endlich viele der $K^\rho_{\varepsilon_x}(x)$ um M zu überdecken. Daraus folgt aber, dass M nur endlich viele der x_j enthalten kann. Das ist ein Widerspruch!

$(ii:)(\Leftarrow)$ Nun sei M folgenkompakt, wir zeigen:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Punkte $x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)} \in M$ so dass wir $M \subset \bigcup_{l=1}^{N(\varepsilon)} K_\varepsilon^\rho(x_l)$ sichern können. (Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein endliches ε-Netz: $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ - man sagt auch: M ist präkompakt!) Wir nehmen nun an, dass dies falsch sei.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\forall N \in \mathbb{N}$ und für jede Wahl der Netzpunkte $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ $\bigcup_{l=1}^{N} K_\varepsilon^\rho(x_l) \subsetneq M$ gilt.
Wir konstruieren nun induktiv eine Folge, welche keine konvergente Teilfolge enthält:
Dazu sei $x_1 \in M$ beliebig gewählt. Weil mit obiger Annahme $K_\varepsilon^\rho(x_1) \neq M$ ist, gibt es ein $x_2 \in M$ mit $\rho(x_1,x_2) \geq \varepsilon$. Desweiteren gilt nach oben: $K_\varepsilon^\rho(x_1) \cup K_\varepsilon^\rho(x_2) \neq M$, womit ein $x_3 \in M$ existiert mit $\rho(x_l,x_3) \geq \varepsilon\,, \forall l = 1,2$.
Induktiv konstruieren wir in dieser Art eine Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset M$ mit $\rho(x_l,x_k) \geq \varepsilon\,, \forall l < k$. Gemäß dieser Konstruktion kann $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ keine konvergente Teilfolge besitzen, weil eine beliebig ausgewählte Teilfolge nicht Cauchy-Folge ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. D.h: Zu jedem $\varepsilon > 0$ exitiert ein endliches ε-Netz: $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ für M, also $M = \bigcup_{l=1}^{N(\varepsilon)} K_\varepsilon^\rho(x_l)\;(*)$.
Zeigen nun: M ist überdeckungskompakt: Wir nehmen dazu an, dass es eine offene Überdeckung $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau_{\rho(.)}$ von M gäbe, aus der keine endlich Überdeckung von M ausgewählt werden könnte. Wir konstruieren nun mit $(*)$ Folge von ε-Netzen.
Wir starten mit $\varepsilon_1 = 1$, $N_1 := N(\varepsilon_1)$ und $\{x_1^1,\ldots,x_{N_1}^1\}$. Mindestens eine der M-überdeckenden, offenen Kugeln, wir wählen gleich $K_{\varepsilon_1}^\rho(x_1^1)$, muss demnach nicht endlich durch Elemente aus $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ überdeckbar sein.
Mit $\varepsilon_2 = 2^{-1}$, $N_2 := N(\varepsilon_2)$ und $\{x_1^2,\ldots,x_{N_2}^2\}$ schreiben wir $K_{\varepsilon_1}^\rho(x_1^1) = \bigcup_{l=1}^{N_2}(K_{\varepsilon_2}^\rho(x_l^2) \cup K_{\varepsilon_1}^\rho(x_1^1))$. Mindestens eine dieser Mengen, wir wählen gleich die Menge $K_{\varepsilon_2}^\rho(x_1^2) \cap K_{\varepsilon_1}^\rho(x_1^1)$, muss wieder nicht endlich durch Elemente aus $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ überdeckbar sein. Ganz analog erhalten wir mit $\varepsilon_3 = 2^{1-3}$, $N_3 := N(\varepsilon_3)$ und $\{x_1^3,\ldots,x_{N_3}^3\}$, dass die Menge:$K_{\varepsilon_3}^\rho(x_1^3) \cap K_{\varepsilon_2}^\rho(x_1^2) \cap K_{\varepsilon_1}^\rho(x_1^1)$ nicht endlich überdeckbar ist.
In dieser Argumentation fortfahrend erklären wir Punkte $\tilde{x}_k$ bei $\varepsilon_k = 2^{1-k}$, $k = 1,2,\ldots$ derart dass $\bigcap_{k=1}^m K_{\varepsilon_k}^\rho(\tilde{x}_k)$ für kein $m \in \mathbb{N}$ endlich überdeckbar ist. Hier gilt zudem $\forall k \in \mathbb{N}$: $K_{\varepsilon_2}^\rho(\tilde{x}_k) \cap K_{\varepsilon_1}^\rho(\tilde{x}_{k+1}) \neq \emptyset$. Die Folge der Punkte $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^\infty$ ist offensichtlich wegen
$\rho(\tilde{x}_k,\tilde{x}_{k+1}) < \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} < 2^{1-k}$ Cauchyfolge und enthält wegen der Überdeckungskompaktkeit von m eine konvergente Teilfolge, welche mit $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^\infty$ übereinstimmen muss, d.h. $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^\infty \to \tilde{x}_o$.
Aus der Überdeckung $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ wählen wir bei $\alpha_o \in I$ ein $\mathscr{O}_{\alpha_o}$ mit $\tilde{x}_o \in \mathscr{O}_{\alpha_o}$. Wegen unserer Voraussetzung gilt für die offene Menge $\mathscr{O}_{\alpha_o} \neq M$. Wir können somit sichern, dass $\tilde{x}_o$ kein Randpunkt von $\mathscr{O}_{\alpha_o}$ ist, also gilt: $2\cdot\eta := \inf_{x\notin\mathscr{O}_{\alpha_o}} \rho(\tilde{x}_o,x) > 0$
Für hinreichend großes k können wir nun sichern, dass: $\rho(\tilde{x}_k,\tilde{x}_o) < \eta$ und $2^{1-k} < \eta$ sind. Somit gilt: $\bigcap_{k=1}^m K_{\varepsilon_k}^\rho(\tilde{x}_k) \subset K_{\varepsilon_m}^\rho(\tilde{x}_m) \subset K_{2\cdot\eta}^\rho(\tilde{x}_o) \subset \mathscr{O}_{\alpha_o}$.
Das ist ein Widerspruch zur Konstruktion der Punktfolge aus nicht endlich überdeckbaren Mengen. Damit war unsere Annahme falsch und M ist somit überdeckungskompakt.

Def: (Präkompakter und vollständiger metrischer Raum) Es sei $(M,\rho(.))$ ein vollständiger metrischer Raum $(M,\rho(.))$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein endliches ε-Netz: $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ so, dass $M \subset \bigcup_{l=1}^{N(\varepsilon)} K_\varepsilon^\rho(x_l)$ gilt. Dann nennen wir $(M,\rho(.))$ vollständig präkompakt! Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $(M,\rho(.))$ nennen wir vollständig präkompakt, wenn K im Sinne des Teilraumes $(K,\rho_{|K}(.))$ vollständig präkompakt ist!

Satz: Jeder vollständig präkompakte metrischen Raum ist kompakt (, also überdeckungs- und folgenkompakt im metrischen Raum).

Bew: $(i:)(\Leftarrow)$ Weil $(M,\rho(.))$ überdeckungskompakt ist, kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ aus der Überdeckung $\{K^{\rho}_{\varepsilon}(x)\}_{x\in M}$ ein endliches ε-Netz: $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ so auswählen, dass $M \subset \bigcup_{l=1}^{N(\varepsilon)} K^{\rho}_{\varepsilon}(x_l)$ gilt. Damit ist $(M,\rho(.))$ präkompakt.

Weil nach dem Äquivalenzsatz $(M,\rho(.))$ auch folgenkompakt ist, muss jede Cauchy-Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (M,\rho(.))$ in $(M,\rho(.))$ auch eine in $(M,\rho(.))$ konvergente Teilfolge enthalten. Die Einzigkeit des Grenzwertes x_o dieser Teilfolge liefert, weil $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge: x_o ist auch Grenzwert der Cauchy-Folge, also ist $(M,\rho(.))$ vollständig.

$(ii:)(\Rightarrow)$ Zeigen nur: Jeder vollständig präkompakte metrischen Raum ist folgenkompakt. *Annahme:* $(M,\rho(.))$ sei nicht folgenkompakt, d.h. es existiert in $(M,\rho(.))$ eine Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, die keine konvergente Teilfolge (keinen Häufungspunkt) in $(M,\rho(.))$ besitzt. Weil $(M,\rho(.))$ präkompakt ist, können wir zu der fix vorgegebenen streng monoton fallenden Nullfolge $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ eine zugeordnetet Folge endlicher ε-Netze angeben. Diese sei: $\{\{\hat{x}_1^m,\ldots,\hat{x}_{N(\varepsilon_m)}^m\}\}_{m=1}^{\infty}$. Wir argumentieren nun analog zum Beweis-Teil $(ii:)$ des Äquivalenzsatzes: In je einer der offenen Kugeln zu ε_m müssen ∞-viele Folgenglieder der Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ enthalten sein. Entsprechend finden wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Punkte aus den jeweiligen ε-Netzen $\tilde{x}_1,\ldots \tilde{x}_k$ so, dass in $\bigcap_{m=1}^{k} K^{\rho}_{\varepsilon_m}(\tilde{x}_m)$ immer unendlich viele Glieder der Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ enthalten sind. Wir wählen nun im Folgenindex aufsteigend zu fixem k x_k^k mit der Auswahlvorschrift: $x_k^k \in \bigcap_{m=1}^{k} K^{\rho}_{\varepsilon_m}(\tilde{x}_m) \cap \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Auf diese Art erhalten wir die Cauchy-Folge $\{x_k^k\}_{k=1}^{\infty}$. Weil $(M,\rho(.))$ ein vollständiger metrischer Raum ist, konvergiert auch diese Cauchy-Folge in $(M,\rho(.))$. Damit war unserer Annahme falsch, d.h. $(M,\rho(.))$ ist folgenkompakt.