Analysis 3 - Definitionen und Rechenregeln zum Nabla-Kalkül

PD Dr. B. Rummler

Wir vereinbaren gemäß Standard-Definition die Bezeichnung $\underline{\nabla}$ für den Nabla-Operator, wobei

$$\underline{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \text{sei.}$$

Im Sinne der klassischen Matrizen-Multiplikation erklären wir den Laplace-Operator $\triangle$ durch:

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \underline{\nabla}^T \cdot \underline{\nabla}$$

Bem: *Alle im folgenden verwandten skalaren Funktionen* $f(\underline{x})\,,g(\underline{x})$ *und vektorwertigen Funktionen* $\underline{u}(\underline{x})\,,\underline{v}(\underline{x})$ *seinen als hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt.*
Vektor-Produkt und Rotation seien hier nur im Sinne des $\mathbb{E}^3$*, also* $n = 3$*, verstanden.*

I.) Standard Definitionen im Nabla-Kalkül sind Gradient, Rotation und Divergenz:

$$\begin{aligned} (i) \quad & grad\, f &=& \ \underline{\nabla}\, f \\ (ii) \quad & rot\, \underline{u} &=& \ \underline{\nabla} \times \underline{u} \\ (iii) \quad & div\, \underline{u} &=& \ \underline{\nabla}^T \cdot \underline{u} \end{aligned}$$

II.) Produkte von Operationen im Nabla-Kalkül

$$\begin{aligned} (i) \quad & rot\, grad\, f = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla}\, f) = \underline{0} \\ (ii) \quad & div\, rot\, \underline{u} = \underline{\nabla}^T \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{u}) = 0 \\ (iii) \quad & div\, grad\, f = \underline{\nabla}^T \cdot (\underline{\nabla}\, f) = \triangle\, f \\ (iv) \quad & rot\, rot\, \underline{u} = grad\, div\, \underline{u} - \triangle\, \underline{u} = \\ & \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{u}) = \underline{\nabla}\, (\underline{\nabla}^T \underline{u}) - \triangle\, \underline{u} \end{aligned}$$

III.) Produkt-Regeln im Nabla-Kalkül - Produkte skalarer und vektorieller Funktionen

$$\begin{aligned} (i) \quad grad\,(fg) &= f\, grad\, g + g\, grad\, f = \\ \underline{\nabla}(fg) &= f\, \underline{\nabla}\, g + g\, \underline{\nabla}\, f \\ (ii) \quad rot\,(f\underline{u}) &= f\, rot\, \underline{u} + grad\, f \times \underline{u} = \\ \underline{\nabla} \times (f\underline{u}) &= f(\underline{\nabla} \times \underline{u}), + (\underline{\nabla} f) \times \underline{u} \\ (iii) \quad div\,(f\underline{u}) &= f\, div\, \underline{u} + \underline{u}^T \cdot grad\, f = \\ \underline{\nabla}^T \cdot (f\underline{u}) &= f\, \underline{\nabla}^T \cdot \underline{u} + \underline{u}^T \cdot (\underline{\nabla}\, f) \end{aligned}$$

Die Ableitungs-(Jacobi-)Matrix $\underline{u}'$ hat im Nabla-Kalkül die Gestalt:

$$\underline{u}' = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^T)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

IV.) Produkt-Regeln im Nabla-Kalkül - vektorielle Produkte im $\mathbb{E}^3$

$$\begin{array}{rrcl} (i) & grad\,(\underline{u}^T \cdot \underline{v}) & = & \underline{u} \times rot\,\underline{v} + \underline{v} \times rot\,\underline{u} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{u} = \\ & \underline{\nabla}(\underline{u}^T \cdot \underline{v}) & = & \underline{u} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) + \underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{u}) + (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^T)^T \cdot \underline{v} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}^T)^T \cdot \underline{u} \\ (ii) & rot\,(\underline{u} \times \underline{v}) & = & (div\,\underline{v})\underline{u} - (div\,\underline{u})\underline{v} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{v} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{u} = \\ & \underline{\nabla} \times (\underline{u} \times \underline{v}) & = & (\underline{\nabla}^T \cdot \underline{v})\underline{u} - (\underline{\nabla}^T \cdot \underline{u})\underline{v} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^T)^T \cdot \underline{v} - (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}^T)^T \cdot \underline{u} \\ (iii) & div\,(\underline{u} \times \underline{v}) & = & \underline{v}^T \cdot (rot\,\underline{u}) - \underline{u}^T \cdot (rot\,\underline{v}) = \\ & \underline{\nabla}^T \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) & = & \underline{v}^T \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{u}) - \underline{u}^T \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \end{array}$$