Analysis 3 - Grundbegriffe der Analysis

PD Dr. B. Rummler

1 Standard-Räume der Analysis

Sei im folgendem $X \neq \varnothing$ die vorgegebene "Grundmenge", $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X und $\mathbb{K}$ sei der Körper der reellen $\mathbb{R}$ oder komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Definition (topologischer Raum)**.** *Ein topologischer Raum ist ein geordnetes Paar (X,τ), wobei das Mengensystem $\tau \subset \mathfrak{P}(X)$ die folgenden Eigenschaften hat:*

(τi) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$

(τii) $\bigcup_{\alpha\in I} \mathscr{O}_\alpha \in \tau$ *für alle* $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$

(τiii) $\bigcap_{j\in\{1,\dots,N\}} \mathscr{O}_j \in \tau$ *für alle* $\{\mathscr{O}_j\}_{j=1}^N \subset \tau$

Man bezeichnet τ als Topologie auf X und nennt alle Elemente $X_\alpha \in \tau$ „offene Mengen".

Definition (Mengen im topologischen Raum)**.** *Sei (X,τ) ein topologischer Raum.*

(i) $A \subset X$ ist abgeschlossen, wenn A^c offen ist. (D.h. $A^c \in \tau$)

(ii) $U \subset X$ heißt Umgebung von $x \in X$, wenn es ein $\mathscr{O} \in \tau$ mit $x \in \mathscr{O} \subset U$ gibt. Schreiben: $U = U(x)$

Beispiele (topologische Räume)**.**

(i) Das Paar $(X,\mathfrak{P}(X))$, wobei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist, bildet einen topologischen Raum. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ wird auch die diskrete Topologie genannt.

(ii) Das Mengensystem τ bestehe aus $\varnothing$ und X. Die Topologie τ heißt chaotische („indiskrete") Topologie.

Definition (Hausdorffraum)**.** *Ein Hausdorffraum (Hausdorffscher topologischer Raum) ist ein topologischer Raum, dessen Topologie dem Hausdorffschen Trennungsaxiom genügt, d.h.*

(τiv) $\forall x,y \in X$ *mit* $x \neq y$ *existieren* $\mathscr{O}_x, \mathscr{O}_y \in \tau$ *so, dass* $x \in \mathscr{O}_x, y \in \mathscr{O}_y$ *und* $\mathscr{O}_x \cap \mathscr{O}_y = \varnothing$.

Definition (Kompakter topologischer Raum: Heine-Borelsche-Überdeckungseigenschaft)**.**
Ein topologischer Raum (X,τ) heißt kompakter topologischer Raum, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\{\mathscr{O}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$ von X endlich viele Indizes $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in I$ gibt, so dass:
$X \subset \mathscr{O}_{\alpha_1} \cup \mathscr{O}_{\alpha_2} \cup \dots \cup \mathscr{O}_{\alpha_k} = \bigcup_{j=1}^k \mathscr{O}_{\alpha_j}$ gilt.
Eine Teilmenge $K \subset X$ des topologischen Raumes (X,τ) nennen wir kompakte Menge in (X,τ), wenn der topologische Raum $(K,\tau \cap K)$ selbst kompakter topologischer Raum ist.

Definition (metrischer Raum). *Ein metrischer Raum ist ein geordnetes Paar* (X,ρ)*. Dabei ist* X *die Grundmenge und man verlangt von der Abbildung* $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ *(der Metrik) die folgende Axiomatik:*

(ρi) $\rho(x,y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$
(ρii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *für alle* $x,y \in X$
(ρiii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ *für alle* $x,y,z \in X$.

Beispiele. *Sei* $X = \mathbb{R}^n$*. Dann bildet das Paar* $(\mathbb{R}^n,\rho_j)$ *mit* $j = 1,2$ *einen metrischen Raum. Als Abkürzung vereinbaren wir hier schon:* $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n,\rho_2)$ *. Die Metriken* ρ_j *seien wie folgt definert:*

(i) $\rho_1(\underline{x},\underline{y}) := \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$ *Manhatten-Metrik*

(ii) $\rho_2(\underline{x},\underline{y}) := \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$ *Euklidische Metrik*

für $\underline{x} = (x_1,...,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ *und* $\underline{y} = (y_1,...,y_n)^T \in \mathbb{R}^n$*.*
Um zu zeigen, dass es sich bei den oben definierten Abbildungen wirklich um jeweils eine Metrik handelt, werden wir nur die Gültigkeit von (ρiii) *zeigen. Seien* $\underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathbb{R}^n$*.*
Zu ρ_1*: Aus der Dreiecksungleichung für Beträge folgt*

$$|x_k + y_k| = |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k|. \tag{1.1}$$

Diese Ungleichung auf jeden Summanden angewendet liefert das Gesuchte

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^n |z_k - y_k|.$$

Für (ρ_2) *erhalten wir unter Berücksichtigung von* (1.1)

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2 + 2\sum_{k=1}^n |x_k - z_k| \cdot |z_k - y_k| + \sum_{k=1}^n |z_k - y_k|^2.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n |a_k||b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)^{1/2}$$

folgt dann

$$\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \leq \left[\left(\sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |z_k - y_k|^2\right)^{1/2}\right]^2.$$

Bemerkung: Jeder metrische Raum (X,ρ) ist in der folgenden Auffassung ein Hausdorffscher topologischer Raum:

Definition (Durch Metrik induzierter topologischer Raum $(X,\tau_{\rho(.)})$).
Für alle $x \in X$ *und für alle* $\varepsilon > 0$ *erklären wir eine offene* ε*-Kugel um* x *durch:*
$K_\varepsilon^\rho(x) := \{y \in X | \rho(x,y) < \varepsilon\}$*. Das System:* $\beta := \{K_\varepsilon^\rho(x)\}_{x\in X,\varepsilon>0}$ *ist ein System offener Mengen bestehend aus den offenen* ε*-(Kugel-)Umgebungen aller Punkte* x *von* X*. Beginnt man mit dem System* β *und nimmt zu diesem System alle diejenigen Mengen dazu, welche durch die Operationen in (*τ *ii) und (*τ *iii) erzeugt werden, so ist das Ergebnis dieses Prozesses eine Hausdorffsche Topologie* $\tau_{\rho(.)}$ *auf* X*. Diese Topologie nennt man: die durch die Metrik* ρ *induzierte Topologie und* $(X,\tau_{\rho(.)})$ *den durch die Metrik* ρ *auf* X *induzierten topologischen Raum.*

Definition (Konvergente Folge, Cauchy-Folge).
(X,ρ) sei ein vorgegebener metrischer Raum.

(i) Eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen ein $x_0 \subset X$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert so, dass gilt

$$\rho(x_k, x_0) < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq k_0(\varepsilon).$$

(ii) Eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass:

$$\rho(x_k, x_l) < \varepsilon \qquad \text{für alle } k,l \geq k_0(\varepsilon).$$

Definition (vollständiger metrischer Raum). *Ein metrischer Raum (X,ρ) heißt vollständig (vollständiger metrischer Raum), wenn jede Cauchy-Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert.*

Definition (Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).
Ein metrischer Raum $(X,\rho(.))$ heißt folgenkompakt, wenn jede Folge von Punkten in $(X,\rho(.))$ eine konvergente Teilfolge besitzt.
Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $(X,\rho(.))$ heißt folgenkompakt, wenn sie als Teilraum $(K,\rho_{|K}(.))$ folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge in $(K,\rho_{|K}(.))$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.

Definition (Präkompakter und vollständiger metrischer Raum).
Es sei $(X,\rho(.))$ ein vollständiger metrischer Raum $(X,\rho(.))$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein endliches ε-Netz: $\{x_1,\ldots,x_{N(\varepsilon)}\}$ so, dass $X \subset \bigcup_{l=1}^{N(\varepsilon)} K_\varepsilon^\rho(x_l)$ gilt. Dann nennen wir $(M,\rho(.))$ vollständig präkompakt! Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $(X,\rho(.))$ nennen wir vollständig präkompakt, wenn K im Sinne des Teilraumes $(K,\rho_{|K}(.))$ vollständig präkompakt ist!

Satz (Äquivalenz der Kompaktheitsdefinitionen in $(X,\rho(.))$).
Im metrischen Raum $(X,\rho(.))$ sind:

(i) die Heine-Borelsche-Überdeckungseigenschaft, d.h: $(X,\tau_{\rho(.)})$ ist Überdeckungskompakt

(ii) die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, d.h: $(X,\tau_{\rho(.)})$ ist folgenkompakt und

(iii) $(X,\tau_{\rho(.)})$ ist präkompakter und vollständiger metrischer Raum

äquivalente Begriffe!

Definition (normieter Raum). *Sei X ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ heißt Norm, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(ni) $\|x\| = 0$ *genau dann, wenn $x = o_X$*

(nii) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ *für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$*

(niii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle $x,y \in X$.(„Minkowski-Ungleichung")*

Das Paar $\mathbb{X} := (X, \|\cdot\|)$ wird normieter Raum genannt.

Bemerkung: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann wird durch $\rho_{\|\cdot\|} := \|x-y\|$ eine Metrik definiert.

Definition (Banachraum)**.** *Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum wird Banachraum genannt.*

Beispiele (Banachräume)**.**

(i) Sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann bildet $\mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$\|\underline{x}\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

den Banachraum $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

(ii) Folgenräume $\boldsymbol{l}_p$ und $\boldsymbol{l}_\infty$: Es seien

$$l_p = \left\{\xi \mid \xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \textit{ und } \xi_j \in \mathbb{C} \textit{ mit } \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty,\, p \in [1,\infty)\right\}$$

und

$$l_\infty = \left\{\xi \mid \xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \textit{ und } \xi_j \in \mathbb{C} \textit{ mit } \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j| < \infty\right\}.$$

Dann bilden die l_p versehen mit der Norm $\|\xi\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p}$ und l_∞ versehen mit der Norm $\|\xi\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j|$ die Banachräume $\boldsymbol{l}_p$ und $\boldsymbol{l}_\infty$.(wobei Addition und Multiplikation mit einem Skalaren elementweise definiert sind.)

Definition (unitärer Raum)**.** *Sei X ein linearer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot)_X : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(ui) $(x,x)_X \geq 0$ *und* $(x,x)_X = 0 \Longleftrightarrow x = o_X$

(uii) $(\alpha x + \beta y, z)_X = \alpha\,(x,z)_X + \beta\,(y,z)_X$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *,* $x,y,z \in X$

(uiii) $(x,y)_X = \overline{(y,x)}_X$ *für alle* $x,y \in X$.

Das Paar $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ wird unitärer Raum genannt.

Ziel ist es jetzt durch das oben eingeführte Skarlarprodukte ein Norm auf X zu definieren. Dazu sei im Folgenden $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$ und X ein unitärer Raum.

Lemma (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Es seien $x, y \in X$. Dann gilt*

$$|(x,y)_X| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{1.2}$$

Wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x = \lambda y$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Für $(x,y)_X \neq 0$ setzen wir $\lambda = \dfrac{\|x\|^2}{(y,x)_X}$.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \lambda y\|^2 &= (x - \lambda y, x - \lambda y)_X \\ &= \|x\|^2 - \lambda\,(y,x)_X - \overline{\lambda}\,(x,y)_X + |\lambda|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4 \|y\|^2}{|(y,x)_X|^2} \end{aligned}$$

und somit $|(x,y)_X| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Aus obiger Ungleichungskette folgt weiter, dass $x = \lambda y$ gelten muss, damit in (1.2) Gleichheit gilt. Mit $x = \lambda y$ eingesetzt, erhalten wir

$$|(x,y)_X| = |\lambda| \cdot |(y,y)_X| = \lambda \cdot \|y\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Die Gültigkeit für $(x,y)_X = 0$ überlassen wir dem Leser. $\square$

Mit dieser wichtigen Ungleichung ist es uns jetzt möglich für $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$ die Normeigenschaften (ni)-$(niii)$ nachzuweisen, wobei wir uns auf $(niii)$ beschränken wollen, da (ni) und (nii) unmittelbar aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgen. Für $x, y \in X$ gilt unter Verwendung von (1.2)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y)_X = \|x\|^2 + (x,y)_X + (y,x)_X + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^2. \end{aligned}$$

Damit wäre gezeigt, dass $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$ eine Norm auf X ist und somit $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Definition (Hilbertraum)**.** *Ein vollständiger unitärer Raum wird Hilbertraum genannt.*

Beispiele. *(i) Es sei $X = \mathbb{R}^n$ bzw. $X = \mathbb{C}^n$, $\underline{x}, \underline{y} \in X$. Dann bilden die Räume X versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\left(\underline{x}, \underline{y}\right) := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

die Hilberträume $\mathbb{E}^n$ bzw. $\mathbb{E}^n_{\mathbb{C}}$.

(ii) Es sei l_2 der (Hilbertsche) Folgenraum. l_2 ist ein Hilbertraum und seine Norm wird induziert vom Skalarprodukt

$$(\xi, \eta)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k \quad \forall\, \xi, \eta \in l_2 \quad .$$

2 Ergänzende Resultate zur Maßtheorie

Die ersten beiden Sätze werden ohne Beweis angegeben. Bei Interesse findet man sie in den Standardwerken zur Analysis I.

Satz (Riemannscher Umordnungssatz). *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe, d.h. sie konvergiert aber die Reihe konvergiert nicht absolut. Dann findet man zu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Umordnung $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ derart, dass*

(i) $\sum_{l=1}^{\infty} a_l \to S'$ *für beliebig vorgegebenes* S'

(ii) $\sum_{l=1}^{\infty} a_l \to +\infty$ *bzw.* $-\infty$

(iii) die Partialsummenfolge der Umordung beliebige Häufungspunke $h_1 \leq h_2$ *besitzt.*

Bemerkung: Im Falle der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert jede umgeordnete Reihe gegen die eineindeutige Reihensumme (denselben Wert)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S = \sum_{l=1}^{\infty} a_l.$$

Satz (Cauchyscher Doppelreihensatz). *Sei $\{a_{j,k}\}_{j,k}$ eine Doppelfolge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\varphi(l) := (j,k)$, eine Abzählung. Für $(j,k) = \varphi(l)$ sei dann $a_{j,k} = b_l$. Die Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ konvergiere absolut und es sei $\sum_{l=1}^{\infty} b_l = S$. Dann gilt:*

(i) $\forall\, k :$ $\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}$ *konvergiert absolut und* $\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} = S_k$

(ii) $\forall\, j :$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$ *konvergiert absolut und* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = Z_j$

(iii) *Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} Z_j$ konvergieren absolut mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j = S.$$

Es sei im Folgenden S ein nichtleeres System von Teilmengen der Grundmenge X. Wir bezeichnen mit $\sigma(S)$ die von S erzeugte σ-Algebra und mit $m(S)$ die monotone Erweiterung von S. Ziel ist es die folgende Identität zu zeigen:

Satz. *Ist S eine Mengenalgebra über X, dann gilt $m(S) = \sigma(S)$.*

Beweis. Wir werden zuerst zeigen, dass $m(S)$ eine σ-Algebra ist. Da wir wissen, dass jede monotone Mengenalgebra eine σ-Algebra ist (Bemerkung aus Vorlesung), reicht es die Eigenschaften einer Mengenalgebra nachzuweisen.
Zu (i): Sei $\mathfrak{C} = \{A \in m(S) |\ A^c \in m(S)\}$ ein monotones System. Die Monotonie gilt, da aus $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (somit auch $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1^c \supseteq A_2^c \supseteq \ldots$) folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m(S) \text{ und } \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \in m(S).$$

Also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$. Genauso zeigt man, dass für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C}$ und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{C} \supseteq S$, gilt wegen der Definition von $m(S)$ auch $\mathfrak{C} \supseteq m(S)$. Da aber auch $\mathfrak{C} \subseteq m(S)$, haben wir $\mathfrak{C} = m(S)$. D.h. aus $A \in m(S)$ folgt $A^c \in m(S)$.
Zu (ii): Wir definieren für jedes $B \in m(S)$ das System

$$\mathfrak{V}_B = \{A \in m(S) |\ A \cup B \in m(S)\} \subseteq m(S).$$

Das System $\mathfrak{V}_B$ ist ein monotones System, da für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{V}_B$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ gilt $A_1 \cup B$, $A_2 \cup B, \ldots \in m(S)$ und $A_1 \cup B \subseteq A_2 \cup B \subseteq \ldots$, also

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup B \in m(S).$$

Somit ist $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathfrak{V}_B$. Analog zeigt man, dass $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathfrak{V}_B$ gilt, für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{V}_B$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. Da S eine Algebra ist, gilt für $B \in S$, $\mathfrak{V}_B \supseteq S$ und, da $\mathfrak{V}_B$ ein monotones System ist, auch $\mathfrak{V}_B \supseteq m(S)$. Also

$$\mathfrak{V}_B = m(S). \qquad (*)$$

Sei $B \in m(S)$ und $C \in S$. Wegen Gleichung $(*)$ gilt $\mathfrak{V}_C = m(S)$, d.h. $B \cup C = C \cup B \in m(S)$, also $C \in \mathfrak{V}_B$. Demzufolge bleibt Gleichung $(*)$ auch für $B \in m(S)$ gültig, was gleichzeitig impliziert:

$$A, B \in m(S) \Longrightarrow A \cup B \in m(S).$$

Folglich ist $m(S)$ eine Mengenalgebra, somit auch σ-Algebra. Dann folgt aus $m(S) \supseteq S$, dass $m(S) \supseteq \sigma(S)$. Da jede σ-Algebra monoton ist und $\sigma(S) \supseteq S$, gilt auch $\sigma(S) \supseteq m(S)$. Also $m(S) = \sigma(S)$.

$\square$