# Elementare Funktionen: Die komplexe Exponentialfunktion

**Wiederholung:** Exponentialfunktion als Potenzreihe: $exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(z-0)^j, \ z \in \mathbb{C}.$

**Definition 1:** Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $\log w = \exp^{-1}(\{w\}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = w\}$.

**Bemerkung 2:** Für $x \in (0,\infty)$ ist $\ln x$ eine Zahl, $\log w$ ist hingegen eine abzählbare Menge komplexer Zahlen. Ist $z_0 \in \log w$, so ist $\log w = \{z_0 + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ist ferner $w = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$, so gilt $\log w = \{\ln r + i\varphi + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Schließlich ist $\log 1 = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Im Sinne üblicher Mengenoperationen nutzen wir:

**Definition 2:** Ist $A \subseteq \mathbb{C}, B \subseteq \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$, so sei:
$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\},$
$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}, \qquad A^m = \left\{ \prod_{i=1}^{m} a_i \mid a_i \in A, i = 1,2,...,m \right\}.$

**Bemerkung 3:** Für $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt (im Sinne von Def. 2):
$\log(w_1 \cdot w_2) = \log w_1 + \log w_2, \qquad \log\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \log w_1 - \log w_2, \qquad \log w^m \supseteq \{m\} \cdot \log w \quad$ für $m \in \mathbb{Z}$.

**Definition 3:** Unter einem *Zweig* von $(\exp)^{-1}$ verstehen wir eine in einem Gebiet definierte stetige Funktion $f$ mit $f(w) \in \log w$ für alle $w \in \mathfrak{D}(f)$.

**Bemerkung 4:** Um einen Zweig von $(\exp)^{-1}$ festlegen zu können, braucht man offenbar ein Gebiet $G$, in dem man $\arg z$ für ein $z \in G$ eindeutig festlegen kann, sodass durch $z \mapsto \arg z$ eine stetige Funktion entsteht. Ein solches Gebiet ist z.B. die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Ebene: $\mathbb{C}_{\leq 0}$, siehe Satz 5.10 der Vorlesung.

**Bemerkung 5:** Jeder Zweig $f$ von $(\exp)^{-1}$ ist in $\mathfrak{D}(f)$ holomorph.

***Beweis:*** Es sei $w_0 \in \mathfrak{D}(f), f(w_0) = z_0$.
Ferner sei für $w_0 + h \in \mathfrak{D}(f) : k(h) = f(w_0 + h) - f(w_0)$.
Dann gilt $k(h) \neq 0$, falls $h \neq 0$; und wegen der Stetigkeit von $f$ gilt: $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$.
Nun ist für $h \neq 0$:

$$\frac{f(w_0+h) - f(w_0)}{h} = \frac{k(h)}{\exp(f(w_0+h)) - \exp(f(w_0))} = \frac{k(h)}{\exp(z_0 + k(h)) - \exp(z_0)} = \left\{\frac{\exp(z_0+k(h)) - \exp(z_0)}{k(h)}\right\}^{-1}.$$

Wegen der Holomorphie von exp und $\exp' = \exp$ gilt: $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(z_0 + k(h)) - \exp(z_0)}{k(h)} = \exp(z_0) = w_0$.
Demnach ist $f$ an der Stelle $w_0$ im komplexen Sinne differenzierbar, und es gilt $f'(w_0) = \frac{1}{w_0}$.

**Definition 4:** Unter der Potenzmenge mit der Basis $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und dem Exponenten $\beta \in \mathbb{C}$ verstehen wir die Zahlenmenge: $[a^\beta] = \{\exp(\beta z) \mid z \in \log a\}$.

**Bemerkung 6:** Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, so enthält $[a^m]$ lediglich das Element $a^m$.
Um dies einzusehen, sei $z_1 = \log a$; es ist $z \in \log a$ genau dann, wenn $z = z_1 + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Man hat dann $\exp(mz) = \exp(mz_1 + 2km\pi i) = \exp(mz_1) = \exp(z_1)^m = a^m$.
Ist ferner $a \in (0, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, so gilt $a^\beta \in [a^\beta]$; es war ja $a^\beta = \exp(\beta \ln a)$, wobei $\ln a \in \log a$ ist.
Schließlich gilt für $z \in \mathbb{C}$: $\exp z \in [\exp z]$, dies ergibt sich sofort aus $1 \in \log e$.

**Bemerkung 7:** (Rechenregeln für Potenzmengen)
Es seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$[a^\alpha] \cdot [b^\alpha] = [(ab)^\alpha]$, $\quad [a^\alpha] \cdot [a^\beta] \supseteq [a^{\alpha+\beta}]$, $\quad [a^\alpha]^m \supseteq [a^{m\alpha}]$.

***Beweis:*** Wir beweisen die zweite Beziehung.
Dazu sei $z_1 \in \log a$; es ist $z \in \log a$ genau dann, wenn $z = z_1 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, folglich:
$[a^\alpha] \cdot [a^\beta]$
$= \{\exp(\alpha z_1 + 2k\alpha\pi i) \cdot \exp(\beta z_1 + 2l\beta\pi i) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\exp((\alpha + \beta)z_1 + 2(k\alpha + l\beta)\pi i) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$
$\supseteq \{\exp((\alpha + \beta)z_1 + 2(\alpha + \beta)k\pi i) \mid k \in \mathbb{Z}\} = [a^{\alpha+\beta}]$.

**Bemerkung 8:** Es sei $n \in \mathbb{N}$; dann ist $[1^{\frac{1}{n}}] = \{\exp(\frac{1}{n}z) \mid z \in \log 1\} = \{\exp(\frac{2k\pi i}{n}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Wegen der Periodizität der exp-Funktion sind unter den angegebenen Zahlen nur $n$ verschiedene, etwa: $[1^{\frac{1}{n}}] = \{\exp(\frac{2k\pi i}{n}) \mid k = 0, 1, ..., n-1\}$.
Die Zahlen von $[1^{\frac{1}{n}}]$ bezeichnet man als *n-te Einheitswurzeln*; sie liegen auf dem Einheitskreis in gleichen Abständen verteilt.

Ist jetzt $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_1 \in \log w$, so ist $[w^{\frac{1}{n}}] = \{\exp(\frac{z_1}{n} + \frac{2k\pi i}{n}) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\exp(\frac{z_1}{n})\} \cdot [1^{\frac{1}{n}}]$.
Also enthält auch $[w^{\frac{1}{n}}]$ genau $n$ Zahlen; sie liegen auf dem Kreis um 0 vom Radius $\sqrt[n]{|w|}$ in gleichen Abständen verteilt.

*Quellen:* Günther, Beyer, Gottwald, Wünsch: Grundkurs Analysis Bnd. 4; Prof. Dr. Bernd Rummler: Vorlesungsskript zur Funktionentheorie