

Funktionentheorie (SS 2021)
Übungsaufgaben, Serie 7

1. Wie viele Nullstellen besitzt das Polynom $f(z) = 2z^4 - 5z + 2$ außerhalb von $K(0, 1)$?
2. Wie viele Nullstellen besitzt das Polynom $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$?
3. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das folgende Integral:

$$\int_{S(0,2)} \frac{ze^{\frac{1}{z}-1} - 1}{z-1} dz$$

4. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden reellen Integrale:

a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dz$$

b)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

c)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx \quad \text{für } n = 2, 3, 4, \dots$$

Hinweis: Betrachten Sie geeignete Tortenstücke als Integrationsweg.

5. Zeigen Sie, wenn $a, b > 0$ dann gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \min\{a, b\}$$