Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
PD. Dr. B. Rummler 25.06.2021

Funktionentheorie (SS 2021)
Übungsaufgaben, Serie 6

1. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Laurent-Reihen

$$(a) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|} z^n \qquad \text{und} \qquad (b) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+2}$$

2. Berechnen Sie die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten

$$(a) \quad \frac{3}{(z+1)(z-2)} \text{ für } 1 < |z| < 2 \qquad \text{und} \qquad (b) \quad \frac{z^2-1}{z^2+1} \text{ für } |z-1| > 2$$

3. Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten

$$(a) \quad \frac{z-1}{\sin^2(z)} \text{ für } 0 < |z| < \pi \qquad \text{und} \qquad (b) \quad \frac{\exp(iz)}{z^2+b^2} \text{ für } 0 < |z-ib| < 2b,\ b > 0$$

4. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet sowie $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, nicht konstante Funktion, die in G holomorph ist. Zeigen Sie

$$|f|_{\partial G} \text{ konstant } \Longrightarrow \exists z \in G \text{ so dass } f(z) = 0$$

5. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Typ der Singularität

$$(i) \quad f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1} \quad \text{in} \quad z_0 = -i$$
$$(ii) \quad g(z) = \cos(1/z) \quad \text{in} \quad z_0 = 0$$

6. Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^3}, \quad \text{und} \quad h(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$$